

اثبات‌های کتاب درسی هندسه ۲



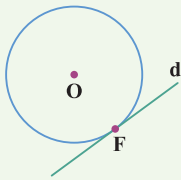
این فایل با اجازه انتشارات گاج از کتاب
فرمول ۲۰ هندسه ۲ انتخاب شده است

آرش عمید

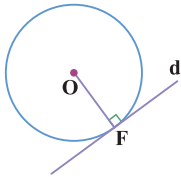
برای دسترسی به محتوای بیشتر به کانال تلگرامی [@ArashAmid](#) مراجعه کنید.

■ فرض کنید خط d بر دایره C در نقطه F مماس است. ثابت کنید شعاع OF و خط مماس بر دایره در نقطه F برهم عمودند. (فعالیت ۱ صفحه ۱۱ کتاب درسی)

اثبات



هر نقطه دیگری غیر از F روی خط d مانند B خارج از دایره قرار دارد. بنابراین فاصله آن تا مرکز دایره بیش تر از شعاع دایره خواهد بود؛ یعنی $OB > r$. از طرف دیگر نقطه F روی دایره قرار دارد، بنابراین فاصله اش تا مرکز دایره برابر با شعاع دایره است؛ یعنی $OF = r$. بنابراین می توان گفت که نقطه F نزدیک ترین نقطه خط d به نقطه O می باشد. حال اگر بخواهیم از O بر خط d عمود کنیم، از آن جایی که فاصله O تا پای عمود، کوتاه ترین فاصله نقاط خط d تا O خواهد بود، بنابراین پای عمود همان نقطه F می باشد. پس شعاع OF در نقطه F بر خط d عمود خواهد بود.



■ خط d در نقطه F بر شعاع OF عمود است. ثابت کنید این خط با دایره فقط یک نقطه تماس دارد و بنابراین بر دایره مماس است. (فعالیت ۲ صفحه ۱۱ کتاب درسی)

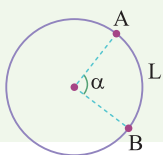
اثبات

اگر هر نقطه دیگری غیر از F مانند B روی خط d در نظر بگیریم، فاصله شان تا نقطه O از مقدار شعاع دایره یعنی OF بیش تر است (زیرا OF بر خط d عمود است).؛ بنابراین همه این نقاط خارج از دایره قرار دارند و خط و دایره تنها در نقطه F با هم مشترک هستند. پس می توان گفت که خط d بر دایره مماس است.

■ **طول کمان:** طول کمان AB از دایره $C(O, R)$ که روبه روی زاویه مرکزی با اندازه α است، به صورت مقابل به دست می آید.

$$L = \frac{\pi R \alpha}{180^\circ}$$

اثبات



طول اندازه
 $2\pi R$ 360°
 L α

طرفین وسطین

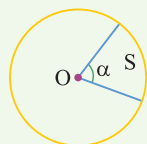
$$L \times 360^\circ = \alpha \times 2\pi R \Rightarrow L = \frac{\alpha \times 2\pi R}{360^\circ} \Rightarrow L = \frac{\pi R \alpha}{180^\circ}$$

می دانیم دایره کمانی با اندازه 360° درجه و طول $2\pi R$ است، پس به کمک تناسب زیر داریم:

■ **مساحت قطاع:** اگر زاویه مرکزی قطاعی از دایره $C(O, R)$ بر حسب درجه α باشد، مساحت قطاع به صورت زیر به دست می آید:

$$S = \frac{\pi R^2 \alpha}{360^\circ}$$

اثبات



مساحت زاویه مرکزی
 πR^2 360°
 S α

$$\Rightarrow \pi R^2 \times \alpha = 360^\circ \times S \Rightarrow S = \frac{\pi R^2 \alpha}{360^\circ}$$

می دانیم دایره قطاعی با زاویه مرکزی 360° و مساحت πR^2 است، پس:

(فعالیت ۱ صفحه ۱۳ کتاب درسی)

■ اگر دو کمان AB و CD از دایره $C(O, r)$ با هم برابر باشند، آن‌گاه وترهای AB و CD هم با یکدیگر برابرند.

اثبات

از مرکز دایره به دو سرتوهای AB و CD وصل می‌کنیم. چون $\widehat{AB} = \widehat{CD}$ است، پس زوایای مرکزی مقابل آن‌ها یعنی $\hat{O}_1$ و $\hat{O}_2$ برابرند، پس دو مثلث AOB و COD به حالت (ض ض ض) هم‌نهشت هستند:

$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{O}_1 = \hat{O}_2 \\ OA = OD = r \\ OB = OC = r \end{array} \right. \xrightarrow{\text{ض ض ض}} \triangle AOB \cong \triangle COD$$

بنابراین اجزای متناظر دو مثلث با هم برابرند، پس $AB = CD$ می‌باشد.

(فعالیت ۲ صفحه ۱۳ کتاب درسی)

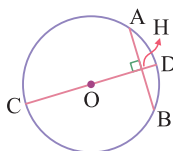
■ اگر دو وتر AB و CD در یک دایره با هم برابر باشند، آن‌گاه کمان‌های نظیر این دو وتر نیز با هم برابرند.

اثبات

از مرکز دایره به دو سرتوهای AB و CD وصل می‌کنیم. دو مثلث AOB و COD به حالت (ض ض ض) هم‌نهشت هستند:

$$\left\{ \begin{array}{l} OA = OC = r \\ OB = OD = r \\ AB = CD \end{array} \right. \xrightarrow{\text{ض ض ض}} \triangle AOB \cong \triangle COD$$

بنابراین اجزای متناظر دو مثلث با هم برابرند، پس $\hat{O}_1 = \hat{O}_2$ می‌باشد؛ چون O_1 و O_2 زوایای مرکزی رو به کمان‌های AB و CD هستند، پس $\widehat{AB} = \widehat{CD}$ می‌باشد.



(فعالیت ۳ صفحه ۱۳ کتاب درسی)

■ در هر دایره، قطر عمود بر هر وتر، آن وتر و کمان نظیرش را نصف می‌کند.

اثبات

از مرکز دایره به دو سرتوهای AB وصل می‌کنیم و داریم:

$$\left\{ \begin{array}{l} OA = OB = r \\ OH = OH \text{ (ضلع مشترک)} \end{array} \right. \xrightarrow{\text{برابری وتر و یک ضلع}} \triangle OHA \cong \triangle OHB$$

چون مثلث‌های OHA و OHB هم‌نهشت هستند، پس اجزای متناظر آن‌ها با هم برابرند، از جمله $AH = BH$ و $\hat{O}_1 = \hat{O}_2$ می‌باشد. چون $AH = BH$ است، پس قطر CD وتر AB را نصف کرده است و چون زوایای مرکزی $\hat{O}_1$ و $\hat{O}_2$ برابرند، پس کمان نظیر آن‌ها یعنی $\widehat{AD}$ و $\widehat{BD}$ نیز برابر می‌باشند، پس قطر CD کمان AB را نیز نصف کرده است.

(فعالیت ۴ صفحه ۱۳ کتاب درسی)

■ اگر قطری از دایره، وتری را نصف کند، آن‌گاه بر آن وتر عمود بوده و کمان نظیر آن را نیز نصف می‌کند.

اثبات

از مرکز دایره به دو سرتوهای AB وصل می‌کنیم. چون CD وتر AB را نصف کرده است، پس $AH = BH$ می‌باشد و داریم:

$$\left\{ \begin{array}{l} OA = OB = r \\ AH = BH \\ OH = OH \text{ (ضلع مشترک)} \end{array} \right. \xrightarrow{\text{ض ض ض}} \triangle AHO \cong \triangle BHO$$

چون مثلث‌های AHO و BHO هم‌نهشت هستند، بنابراین اجزای متناظر آن‌ها با هم برابرند، از جمله $\hat{H}_1 = \hat{H}_2$ و $\hat{O}_1 = \hat{O}_2$ می‌باشد. چون زوایای مرکزی O_1 و O_2 برابرند، پس کمان مقابل آن‌ها یعنی $\widehat{AD}$ و $\widehat{BD}$ برابرند؛ بنابراین کمان نظیر وتر AB را نصف کرده است. از طرفی چون $\hat{H}_1 + \hat{H}_2 = 180^\circ$ و $\hat{H}_1 = \hat{H}_2$ ، پس $\hat{H}_1 = \hat{H}_2 = 90^\circ$ می‌باشد، بنابراین قطر CD بر وتر AB عمود است.

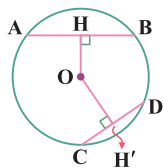
■ اگر قطری از دایره کمانی را نصف کند، آن‌گاه این قطر بر وتر نظیر آن کمان عمود است و آن را نصف می‌کند.

اثبات

وتر نظیر کمان AB را رسم می‌کنیم. چون قطر CD کمان AB را نصف کرده است، پس $\widehat{AD} = \widehat{BD}$ می‌باشد. حال از مرکز دایره به دو سر وتر AB وصل می‌کنیم. چون $\widehat{AD} = \widehat{BD}$ می‌باشد، پس زوایای مرکزی مقابل کمان‌های AD و BD یعنی $\widehat{O_1}$ و $\widehat{O_2}$ با هم برابرند، پس:

$$\left\{ \begin{array}{l} OA = OB = r \\ \widehat{O_1} = \widehat{O_2} \\ OH = OH \text{ (ضلع مشترک)} \end{array} \right. \xrightarrow{\text{ضیض}} \triangle AHO \cong \triangle BHO$$

چون دو مثلث AHO و BHO همنهشت هستند، بنابراین اجزای متناظر آن‌ها با هم برابرند، یعنی $AH = BH$ و $\widehat{H_1} = \widehat{H_2}$ می‌باشد. چون $AH = BH$ و $\widehat{H_1} = \widehat{H_2}$ پس $\widehat{H_1} = \widehat{H_2} = 90^\circ$ می‌باشند، پس قطر CD وتر نظیر کمان AB یعنی وتر AB را نصف کرده است. از آن جایی که $\widehat{H_1} + \widehat{H_2} = 180^\circ$ بوده و این یعنی قطر CD بر وتر نظیر کمان AB یعنی وتر AB عمود است.



(تمرین ۸ صفحه ۱۷ کتاب درسی)

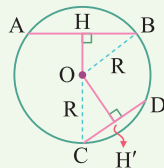
■ وترهای نامساوی: دایره $C(O, R)$ در شکل مقابل مفروض است. $AB > CD$ اگر و تنها اگر $OH < OH'$.

اثبات

حالت اول فرض می‌کنیم $AB > CD$ باشد. از O به B و C وصل می‌کنیم. می‌دانیم H وسط AB و H' وسط CD می‌باشد، پس:

$$AB > CD \Rightarrow \frac{AB}{2} > \frac{CD}{2} \Rightarrow BH > CH'$$

حال به کمک قضیه فیثاغورس در مثلث‌های OHB و OCH' داریم:



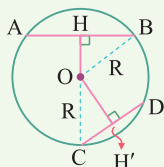
$$OB^2 = OH^2 + BH^2 \Rightarrow R^2 = OH^2 + BH^2 \Rightarrow BH^2 = R^2 - OH^2$$

$$OC^2 = OH'^2 + CH'^2 \Rightarrow R^2 = OH'^2 + CH'^2 \Rightarrow CH'^2 = R^2 - OH'^2$$

چون $BH > CH'$ است، پس $BH^2 > CH'^2$ می‌باشد و داریم:

$$R^2 - OH^2 > R^2 - OH'^2 \Rightarrow -OH^2 > -OH'^2 \Rightarrow OH^2 < OH'^2 \Rightarrow OH < OH'$$

حالت دوم فرض می‌کنیم $OH < OH'$ باشد. از O به B و C وصل می‌کنیم. به کمک قضیه فیثاغورس در مثلث‌های OHB و OCH' داریم:



$$OB^2 = OH^2 + BH^2 \Rightarrow R^2 = OH^2 + BH^2 \Rightarrow OH^2 = R^2 - BH^2$$

$$OC^2 = OH'^2 + CH'^2 \Rightarrow R^2 = OH'^2 + CH'^2 \Rightarrow OH'^2 = R^2 - CH'^2$$

چون $OH < OH'$ است، پس $OH^2 < OH'^2$ می‌باشد و داریم:

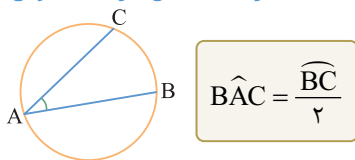
$$R^2 - BH^2 < R^2 - CH'^2 \Rightarrow -BH^2 < -CH'^2 \Rightarrow BH^2 > CH'^2 \Rightarrow BH > CH'$$

می‌دانیم H وسط وتر AB و H' وسط وتر CD است، پس:

$$BH > CH' \xrightarrow{\times 2} 2BH > 2CH' \Rightarrow AB > CD$$

(فعالیت ۲، ۳ و ۴ صفحه‌های ۱۳ و ۱۴ کتاب درسی)

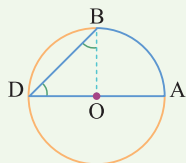
■ اندازه زاویه محاطی: اندازه هر زاویه محاطی برابر نصف اندازه کمان روبه روی آن است.



اثبات

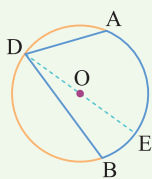
برای اثبات این که اندازه هر زاویه محاطی برابر نصف اندازه کمان روبه رویش می باشد، باید هر سه حالت زیر را اثبات کنیم.

حالت اول یک ضلع زاویه از مرکز دایره عبور می کند. از مرکز دایره به B وصل می کنیم. زاویه $\widehat{BOA}$ زاویه خارجی مثلث OBD است، بنابراین برابر با مجموع دو زاویه داخلی غیرمجاورش است.



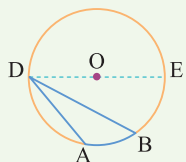
$$\left. \begin{array}{l} \widehat{BOA} = \widehat{ODB} + \widehat{OBD} \\ OB = OD = r \Rightarrow \widehat{ODB} = \widehat{OBD} \end{array} \right\} \Rightarrow \widehat{BOA} = 2\widehat{ODB} \Rightarrow \widehat{ODB} = \frac{\widehat{BOA}}{2} \xrightarrow{\widehat{BOA} = \widehat{AB}} \widehat{ODB} = \frac{\widehat{AB}}{2} \Rightarrow \widehat{BDA} = \frac{\widehat{AB}}{2}$$

حالت دوم دو ضلع زاویه در دو طرف مرکز دایره قرار دارند. قطر DE را رسم می کنیم و طبق حالت اول خواهیم داشت:



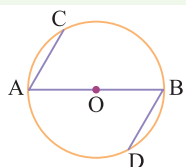
$$\left. \begin{array}{l} \widehat{ADE} = \frac{\widehat{AE}}{2} \\ \widehat{BDE} = \frac{\widehat{BE}}{2} \end{array} \right\} \Rightarrow \widehat{ADE} + \widehat{BDE} = \frac{\widehat{AE}}{2} + \frac{\widehat{BE}}{2} \Rightarrow \widehat{ADB} = \frac{\widehat{AB}}{2}$$

حالت سوم هر دو ضلع زاویه در یک طرف مرکز دایره قرار دارند. قطر DE را رسم می کنیم و طبق حالت های اول و دوم داریم:



$$\left. \begin{array}{l} \widehat{ADE} = \frac{\widehat{AE}}{2} \\ \widehat{BDE} = \frac{\widehat{BE}}{2} \end{array} \right\} \Rightarrow \widehat{ADE} - \widehat{BDE} = \frac{\widehat{AE} - \widehat{BE}}{2} \Rightarrow \widehat{ADB} = \frac{\widehat{AB}}{2}$$

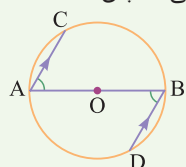
■ در شکل مقابل AB قطری از دایره است و وترهای AC و BD موازی اند. ثابت کنید $AC = BD$.



(تمرین ۵ صفحه ۱۷ کتاب درسی)

اثبات

چون AC و BD موازی و قطر AB مورب است، پس زاویه های $\widehat{CAB}$ و $\widehat{DBA}$ برابرند. از طرفی زاویه های $\widehat{CAB}$ و $\widehat{DBA}$ محاطی اند، پس:



$$\widehat{CAB} = \widehat{DBA} \Rightarrow \frac{\widehat{BC}}{2} = \frac{\widehat{AD}}{2} \Rightarrow \widehat{BC} = \widehat{AD}$$

چون AB قطر دایره است، پس $\widehat{ACB} = 180^\circ$ و $\widehat{ADB} = 180^\circ$ می باشند، بنابراین داریم:

$$\left\{ \begin{array}{l} \widehat{AC} + \widehat{BC} = 180^\circ \Rightarrow \widehat{BC} = 180^\circ - \widehat{AC} \\ \widehat{AD} + \widehat{BD} = 180^\circ \Rightarrow \widehat{AD} = 180^\circ - \widehat{BD} \end{array} \right. \xrightarrow{\widehat{BC} = \widehat{AD}} 180^\circ - \widehat{AC} = 180^\circ - \widehat{BD} \Rightarrow \widehat{AC} = \widehat{BD}$$

چون کمان های AC و BD برابرند، پس وتر نظیر آن ها نیز برابرند، پس $AC = BD$ می باشد.

(کاردرکلاس صفحه ۱۵ کتاب درسی)

■ دو وتر که یکدیگر را درون دایره قطع نمی‌کنند با هم موازی اند، اگر و تنها اگر کمان‌های محدود بین آن‌ها مساوی باشد.

اثبات

حالت اول فرض می‌کنیم دو وتر AB و CD با هم موازی اند:

از A به D وصل می‌کنیم. با توجه به قضیه خطوط موازی و مورب، زاویه‌های $\widehat{BAD}$ و $\widehat{ADC}$ برابرند. چون هر دو زاویه، محاطی هستند، پس:

$$\widehat{ADC} = \frac{\widehat{AC}}{2} \quad \widehat{BAD} = \frac{\widehat{BD}}{2} \quad \xrightarrow{\widehat{BAD} = \widehat{ADC}} \frac{\widehat{AC}}{2} = \frac{\widehat{BD}}{2} \Rightarrow \widehat{AC} = \widehat{BD}$$

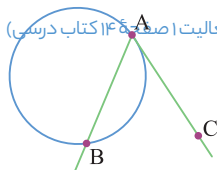
حالت دوم فرض می‌کنیم کمان‌های EG و FH با هم برابرند:

وترهای EF و GH را رسم می‌کنیم و سپس از E به H وصل می‌کنیم؛ زوایای $\widehat{FÊH}$ و $\widehat{ÊHG}$ هر دو محاطی اند؛ بنابراین:

$$\left. \begin{aligned} \widehat{FÊH} &= \frac{\widehat{FH}}{2} \\ \widehat{ÊHG} &= \frac{\widehat{EG}}{2} \end{aligned} \right\} \xrightarrow{\widehat{FH} = \widehat{EG}} \widehat{FÊH} = \widehat{ÊHG}$$

چون زاویه‌های $\widehat{FÊH}$ و $\widehat{ÊHG}$ برابرند، پس طبق عکس قضیه خطوط موازی و مورب، وتر EF موازی وتر GH است.

(فعالیت ۱ صفحه ۱۴ کتاب درسی)

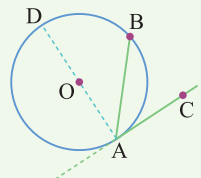


$$\widehat{BAC} = \frac{\widehat{AB}}{2}$$

■ **اندازه زاویه ظلی:** اندازه هر زاویه ظلی برابر است با نصف کمان روبه‌رو به آن زاویه.

اثبات

حالت اول زاویه ظلی حاده است؛ قطر گذرنده از نقطه A را رسم می‌کنیم:

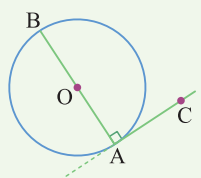


$$\widehat{DAC} = 90^\circ = \frac{1}{2} (180^\circ) \xrightarrow{\widehat{AD} = 180^\circ} \widehat{DAC} = \frac{1}{2} \widehat{AD}$$

$$\widehat{DAB} = \frac{1}{2} \widehat{BD}$$

$$\widehat{BAC} = \widehat{DAC} - \widehat{DAB} = \frac{1}{2} (\widehat{AD} - \widehat{BD}) = \frac{1}{2} \widehat{AB}$$

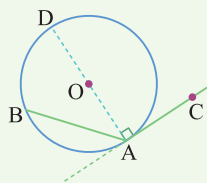
زاویه $\widehat{DAB}$ محاطی است؛ بنابراین:



می‌دانیم که قطر دایره در نقطه تماس بر خط مماس عمود است. بنابراین با توجه به قائمه بودن زاویه $\widehat{BAC}$ و مماس بودن AC ، پاره خط AB قطر دایره خواهد بود:

$$\widehat{BAC} = 90^\circ = \frac{1}{2} (180^\circ) \xrightarrow{\widehat{AB} = 180^\circ} \widehat{BAC} = \frac{1}{2} \widehat{AB}$$

حالت سوم زاویه ظلی منفرجه است؛ قطر گذرنده از نقطه A را رسم می‌کنیم:



AD قطر است و AC در دایره مماس شده است. بنابراین:

$$\widehat{DAC} = 90^\circ = \frac{1}{2} (180^\circ) \xrightarrow{\widehat{AD}=180^\circ} \widehat{DAC} = \frac{1}{2} \widehat{AD}$$

زاویه $\widehat{DAB}$ محاطی است. بنابراین:

$$\widehat{DAB} = \frac{1}{2} \widehat{BD}$$

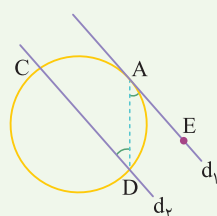
$$\widehat{BAC} = \widehat{DAB} + \widehat{DAC} = \frac{1}{2} (\widehat{BD} + \widehat{AD}) = \frac{1}{2} \widehat{ADB}$$

(تمرین ۱ قسمت الف) صفحه ۱۶ کتاب درسی)

■ در شکل مقابل، خط d_1 بر دایره مماس است. اگر $d_1 \parallel d_2$ باشد، ثابت کنید $\widehat{AC} = \widehat{AD}$.

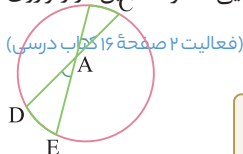
اثبات

از A به D وصل می‌کنیم. بنابر قضیه خطوط موازی و مورب، $\widehat{EAD} = \widehat{ADC}$ می‌باشد. چون زاویه EAD ظلی و زاویه ADC محاطی هستند، پس:



$$\begin{cases} \widehat{EAD} = \frac{\widehat{AD}}{2} \\ \widehat{ADC} = \frac{\widehat{AC}}{2} \end{cases} \xrightarrow{\widehat{EAD}=\widehat{ADC}} \frac{\widehat{AD}}{2} = \frac{\widehat{AC}}{2} \Rightarrow \widehat{AD} = \widehat{AC}$$

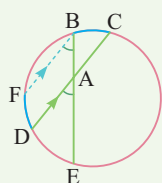
■ **زاویه بین دو وتر:** اندازه زاویه‌ای که از برخورد دو وتر در داخل یک دایره تشکیل می‌شود، برابر است با نصف مجموع کمان‌هایی که توسط این دو وتر روی دایره ایجاد شده‌اند.



$$\widehat{DAE} = \widehat{BAC} = \frac{\widehat{BC} + \widehat{DE}}{2}$$

اثبات

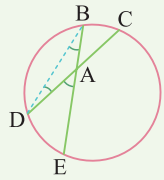
روش اول از نقطه B خطی موازی با DC رسم می‌کنیم تا دایره را در F قطع کند؛ با توجه به موازی بودن وترهای BF و CD، کمان‌های BC و DF با هم برابر خواهند بود.



چون $BF \parallel DC$ ، پس طبق قضیه خطوط موازی و مورب، زوایای DAE و FBE برابرند. زاویه FBE محاطی است، پس:

$$\widehat{FBE} = \frac{\widehat{FE}}{2} = \frac{\widehat{DF} + \widehat{DE}}{2} \Rightarrow \widehat{DAE} = \frac{\widehat{DF} + \widehat{DE}}{2} \xrightarrow{\widehat{DF}=\widehat{BC}} \widehat{DAE} = \frac{\widehat{BC} + \widehat{DE}}{2}$$

روش دوم از نقطه B به D وصل می‌کنیم. زاویه DAE، زاویه خارجی مثلث ABD است، بنابراین با مجموع دو زاویه داخلی غیرمجاورش برابر است. پس:



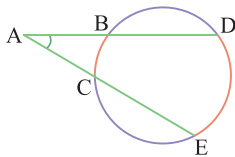
$$\widehat{DAE} = \widehat{DBA} + \widehat{ADB}$$

زوایای $\widehat{DBA}$ و $\widehat{ADB}$ محاطی هستند، پس:

$$\begin{cases} \widehat{DBA} = \frac{\widehat{DE}}{2} \\ \widehat{ADB} = \frac{\widehat{BC}}{2} \end{cases} \Rightarrow \widehat{DAE} = \frac{\widehat{DE}}{2} + \frac{\widehat{BC}}{2} \Rightarrow \widehat{DAE} = \frac{\widehat{BC} + \widehat{DE}}{2}$$

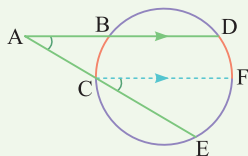
■ **زاویه بین امتداد دو وتر:** اندازه زاویه‌ای که از برخورد امتداد دو وتر در بیرون دایره تشکیل می‌شود، برابر است با نصف تفاضل کمان‌هایی که میان اضلاع زاویه محدود شده‌اند.

(فعالیت ۱ صفحه ۵ کتاب درسی)



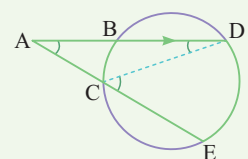
$$\widehat{A} = \widehat{DAE} = \frac{\widehat{DE} - \widehat{BC}}{2}$$

اثبات



روش اول از نقطه C خطی موازی با BD رسم می‌کنیم تا دایره را در F قطع کند؛ با توجه به موازی بودن دو وتر BD و CF، دو کمان BC و DF با هم برابر خواهند بود. از طرفی چون AD موازی CF است، بنابراین قضیه خطوط موازی و مورب، $\widehat{DAE} = \widehat{FCE}$ هستند. چون زاویه $\widehat{FCE}$ محاطی است، داریم:

$$\widehat{FCE} = \frac{\widehat{EF}}{2} \xrightarrow{\widehat{EF} = \widehat{DE} - \widehat{DF}} \widehat{FCE} = \frac{\widehat{DE} - \widehat{DF}}{2} \xrightarrow{\widehat{DF} = \widehat{BC}} \widehat{FCE} = \frac{\widehat{DE} - \widehat{BC}}{2}$$



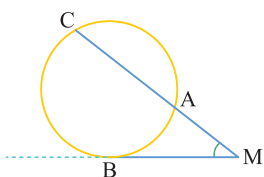
روش دوم از نقطه C به D وصل می‌کنیم. زاویه DCE زاویه خارجی مثلث ACD است. بنابراین با مجموع دو زاویه داخلی غیرمجاورش برابر است:

$$\widehat{DCE} = \widehat{DAE} + \widehat{ADC} \Rightarrow \widehat{DAE} = \widehat{DCE} - \widehat{ADC}$$

از طرفی زوایای DCE و ADC محاطی هستند، پس:

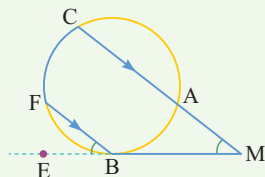
$$\begin{cases} \widehat{DCE} = \frac{\widehat{DE}}{2} \\ \widehat{ADC} = \frac{\widehat{BC}}{2} \end{cases} \xrightarrow{\widehat{DAE} = \widehat{DCE} - \widehat{ADC}} \widehat{DAE} = \frac{\widehat{DE}}{2} - \frac{\widehat{BC}}{2} = \frac{\widehat{DE} - \widehat{BC}}{2}$$

■ **زاویه بین امتداد وتر و مماس:** در شکل زیر، MB بردایره مماس است. زاویه بین قاطع MC و مماس MB برابر است با: (تمرین ا قسمت پ) صفحه ۶ کتاب درسی)



$$\widehat{M} = \frac{\widehat{BC} - \widehat{AB}}{2}$$

اثبات

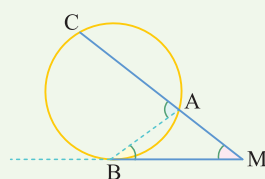


از نقطه B خطی موازی با وتر AC رسم می‌کنیم تا دایره را در نقطه F قطع کند. با توجه به موازی بودن وترهای AC و BF، کمان‌های FC و AB با هم برابرند.

از طرفی با توجه به قضیه خطوط موازی و مورب، $\widehat{M} = \widehat{FBE}$ است. چون زاویه FBE ظلی است، داریم:

$$\widehat{FBE} = \frac{\widehat{FB}}{2} \xrightarrow{\widehat{FB} = \widehat{BC} - \widehat{FC}} \widehat{FBE} = \frac{\widehat{BC} - \widehat{FC}}{2} \xrightarrow{\widehat{FC} = \widehat{AB}} \widehat{FBE} = \frac{\widehat{BC} - \widehat{AB}}{2} \xrightarrow{\widehat{FBE} = \widehat{M}} \widehat{M} = \frac{\widehat{BC} - \widehat{AB}}{2}$$

از A به B وصل می‌کنیم. زاویه CAB زاویه خارجی مثلث ABM است، بنابراین با مجموع دو زاویه داخلی غیرمجاورش برابر است.



$$\widehat{CAB} = \widehat{ABM} + \widehat{M} \Rightarrow \widehat{M} = \widehat{CAB} - \widehat{ABM}$$

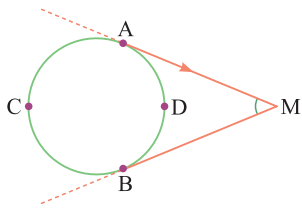
زاویه CAB محاطی و زاویه ABM ظلی است، بنابراین داریم:

$$\begin{cases} \widehat{CAB} = \frac{\widehat{BC}}{2} \\ \widehat{ABM} = \frac{\widehat{AB}}{2} \end{cases} \xrightarrow{\widehat{M} = \widehat{CAB} - \widehat{ABM}} \widehat{M} = \frac{\widehat{BC}}{2} - \frac{\widehat{AB}}{2} \Rightarrow \widehat{M} = \frac{\widehat{BC} - \widehat{AB}}{2}$$

هر دو روش رو یاد بگیر.

(تمرین ۱ قسمت (ب) صفحه ۱۶ کتاب درسی)

■ **زاویه بین دو مماس:** در شکل زیر MA و MB بر دایره مماس اند. زاویه AMB برابر است با:



$$\widehat{AMB} = \frac{\widehat{ACB} - \widehat{ADB}}{2}$$

اثبات

روش اول از نقطه B خطی موازی با MA رسم می‌کنیم تا دایره را در نقطه F قطع کند. با توجه به موازی بودن BF و MA، کمان‌های ACF و ADB برابر خواهند بود. چون MA || BF است، طبق قضیه خطوط موازی و مورب، $\widehat{M} = \widehat{FBE}$ می‌باشد. زاویه FBE زاویه ظلی است، پس:

$$\begin{aligned} \widehat{FBE} &= \frac{\widehat{FB}}{2} \Rightarrow \widehat{M} = \frac{\widehat{FB}}{2} \xrightarrow{\widehat{FB} = \widehat{ACB} - \widehat{ACF}} \widehat{M} = \frac{\widehat{ACB} - \widehat{ACF}}{2} \\ &\xrightarrow{\widehat{ACF} = \widehat{ADB}} \widehat{M} = \frac{\widehat{ACB} - \widehat{ADB}}{2} \end{aligned}$$

روش دوم از A به B وصل می‌کنیم. زاویه EAB، زاویه خارجی مثلث AMB است. بنابراین با مجموع دو زاویه داخلی غیرمجاورش برابر است:

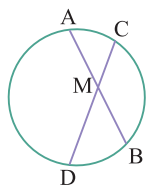
$$\widehat{EAB} = \widehat{M} + \widehat{ABM} \Rightarrow \widehat{M} = \widehat{EAB} - \widehat{ABM}$$

زوایای EAB و ABM زوایای ظلی هستند، پس:

$$\begin{cases} \widehat{EAB} = \frac{\widehat{ACB}}{2} \\ \widehat{ABM} = \frac{\widehat{ADB}}{2} \end{cases} \Rightarrow \widehat{M} = \frac{\widehat{ACB}}{2} - \frac{\widehat{ADB}}{2} \Rightarrow \widehat{M} = \frac{\widehat{ACB} - \widehat{ADB}}{2}$$

■ **رابطه طولی بین دو وتر متقاطع:** هرگاه خط‌های شامل دو وتر دلخواه مانند AB و CD در نقطه‌ای مانند M درون دایره یکدیگر را قطع کنند، آن‌گاه داریم:

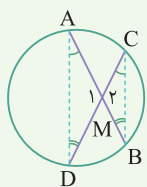
(فعالیت صفحه ۱۸ کتاب درسی)



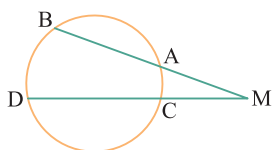
$$MA \times MB = MC \times MD$$

اثبات

از A به D و از C به B وصل می‌کنیم. مثلث‌های MAD و MBC با دو زاویه برابر متشابه‌اند. زیرا زوایای محاطی DAM و BCM رو به کمان BD هستند، پس با هم برابرند. از طرفی $\widehat{M}_1 = \widehat{M}_2$ می‌باشد. بنابراین داریم:



$$\frac{MA}{MC} = \frac{MD}{MB} \Rightarrow MA \times MB = MC \times MD$$



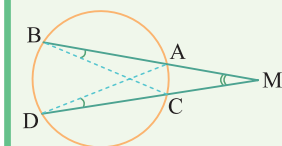
■ **رابطه طولی بین دو وتر و امتداد آن‌ها:** هرگاه خط‌های شامل دو وتر دلخواه مانند AB و CD در نقطه‌ای

مانند M خارج از دایره یکدیگر را قطع کنند، آن‌گاه داریم:

(فعالیت صفحه ۱۸ کتاب درسی)

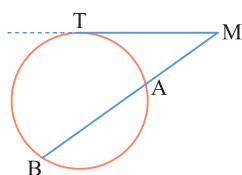
$$MA \times MB = MC \times MD$$

اثبات



از نقطه A به D و از B به C وصل می‌کنیم. مثلث‌های MDA و MBC متشابه‌اند، زیرا زوایای MDA و MBC و زوایای محاطی رو به کمان AC هستند، پس با هم برابرند و زاویه M در دو مثلث مشترک است و حال داریم:

$$\frac{MA}{MC} = \frac{MD}{MB} \Rightarrow MA \times MB = MC \times MD$$

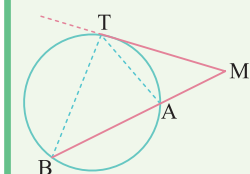


■ **رابطه طولی بین مماس و قاطع:** هرگاه M نقطه‌ای بیرون از دایره باشد و از M مماس و قاطعی نسبت به دایره

رسم کنیم، مربع اندازه مماس برابر است با حاصل ضرب اندازه‌های دو قطعه قاطع. (فعالیت صفحه‌های ۱۸ و ۱۹ کتاب درسی)

$$MT^2 = MA \times MB$$

اثبات



از نقطه T به نقاط A و B وصل می‌کنیم. مثلث‌های MAT و MTB با دو زاویه برابر، متشابه‌اند. زیرا زاویه ظلی MTA و زاویه محاطی MBT رو به کمان AT هستند، پس با هم برابرند. از طرفی زاویه M در دو مثلث مشترک است، پس:

$$\frac{MA}{MT} = \frac{MT}{MB} \Rightarrow MT \times MT = MA \times MB \Rightarrow MT^2 = MA \times MB$$

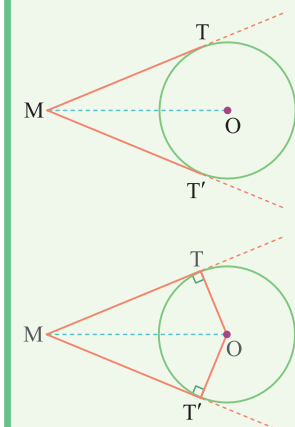
(کار در کلاس صفحه ۲۰ کتاب درسی)

■ اگر از نقطه M خارج دایره C(O, R) دو مماس بردایره رسم کنیم و نقاط تماس را T و T' بنامیم، داریم:

□ نیم خط MO نیمساز زاویه TMT' است.

□ اندازه‌های دو مماس با هم برابرند.

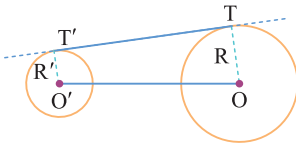
اثبات



ابتدا شکل مسئله را رسم می‌کنیم. حال از مرکز دایره به نقاط T و T' وصل می‌کنیم. از آن جایی که شعاع دایره بر خط مماس در نقطه تماس عمود است، بنابراین دو مثلث MTO و MT'O قائم‌الزاویه‌اند و با هم هم‌نهشت هستند. زیرا OT و OT' شعاع دایره هستند، پس با هم برابرند و وتر OM در دو مثلث مشترک است. بنابراین اجزای متناظر دو مثلث با هم برابرند:

$$MT = MT' \quad \square$$

□ و این یعنی نیم خط MO نیمساز زاویه TMT' است.



■ **طول مماس مشترک خارجی:** در دو دایره $C(O, R)$ و $C'(O', R')$ ، اگر $OO' = d$ باشد طول مماس مشترک خارجی از رابطه زیر به دست می آید:

(فعالیت صفحه ۲۱ کتاب درسی)

$$TT' = \sqrt{d^2 - (R - R')^2}$$

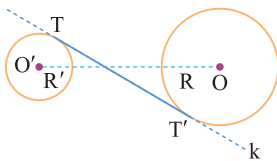
اثبات

از نقطه O' خطی به موازات خط m رسم می کنیم تا شعاع OT را در نقطه ای مانند H قطع کند. از آن جایی که دو شعاع OT و $O'T'$ به ترتیب در نقاط T و T' بر خط m عمودند، چهارضلعی $TT'O'H$ مستطیل است و خواهیم داشت:

$$TH = T'O' = R' \quad , \quad TT' = HO'$$

حال از قضیه فیثاغورس در مثلث $O'HO$ استفاده می کنیم:

$$O'H^2 + OH^2 = OO'^2 \Rightarrow (TT')^2 + (OT - TH)^2 = OO'^2 \Rightarrow TT'^2 + (R - R')^2 = d^2 \Rightarrow TT' = \sqrt{d^2 - (R - R')^2}$$

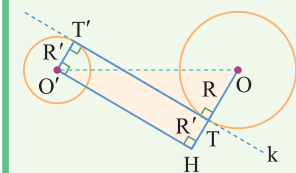


■ **طول مماس مشترک داخلی:** در دو دایره $C(O, R)$ و $C'(O', R')$ ، اگر $OO' = d$ باشد، طول مماس مشترک داخلی از رابطه زیر به دست می آید:

(فعالیت صفحه ۲۲ کتاب درسی)

$$TT' = \sqrt{d^2 - (R + R')^2}$$

اثبات



از نقطه O' (مرکز دایره کوچک تر) خطی به موازات خط k رسم می کنیم تا امتداد شعاع OT را در نقطه H قطع کند. از آن جایی که دو شعاع OT و $O'T'$ به ترتیب در نقاط T و T' بر خط k عمودند، بنابراین چهارضلعی $T'O'HT$ مستطیل است و خواهیم داشت:

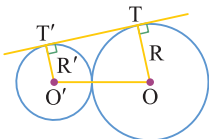
$$O'T' = TH = R' \quad , \quad TT' = O'H$$

حال در مثلث قائم الزاویه $OO'H$ از رابطه فیثاغورس کمک می گیریم:

$$OO'^2 = OH^2 + O'H^2 \Rightarrow d^2 = (R + R')^2 + TT'^2 \Rightarrow TT' = \sqrt{d^2 - (R + R')^2}$$

(فعالیت صفحه ۲۲ کتاب درسی)

■ طول مماس مشترک خارجی دو دایره مماس خارج با شعاع های R و R' برابر است با:



$$TT' = 2\sqrt{RR'}$$

اثبات

با استفاده از دستور محاسبه طول مماس مشترک خارجی و با توجه به این که در دو دایره مماس خارج $d = R + R'$ است، خواهیم داشت:

$$\begin{cases} TT' = \sqrt{d^2 - (R - R')^2} \\ d = R + R' \end{cases} \Rightarrow TT' = \sqrt{(R + R')^2 - (R - R')^2} = \sqrt{R^2 + 2RR' + R'^2 - (R^2 - 2RR' + R'^2)} = \sqrt{4RR'} = 2\sqrt{RR'}$$



■ طول مماس مشترک داخلی دو دایره مماس خارج، برابر صفر است.

اثبات

وقتی دو دایره مماس خارج هستند، $d = R + R'$ است، پس:

$$\begin{cases} TT' = \sqrt{d^2 - (R + R')^2} \\ d = R + R' \end{cases} \Rightarrow TT' = \sqrt{(R + R')^2 - (R + R')^2} = 0$$

برای دسترسی به محتوای بیشتر به کانال تلگرامی @ArashAmid مراجعه کنید.



■ طول مماس مشترک خارجی دو دایره مماس داخل، برابر صفر است.

اثبات

وقتی دو دایره مماس داخل هستند، $d = |R - R'|$ است، پس:

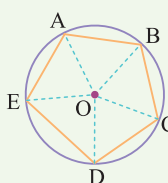
$$\begin{cases} TT' = \sqrt{d^2 - (R - R')^2} \\ d = |R - R'| \end{cases} \Rightarrow TT' = \sqrt{(R - R')^2 - (R - R')^2} = 0$$

(صفحه ۲۴ کتاب درسی)

■ یک چندضلعی محاطی است، اگر و فقط اگر عمودمنصف‌های همه ضلع‌های آن در یک نقطه هم‌رس باشند.

اثبات

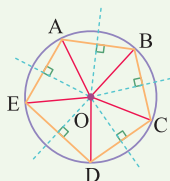
با توجه به دو شرطی بودن قضیه، آن را در دو حالت اثبات می‌کنیم:



حالت اول فرض می‌کنیم چندضلعی محاطی باشد، به عبارت دیگر دایره‌ای وجود داشته باشد که از همه رأس‌های آن عبور کند. از O به رأس‌های چندضلعی وصل می‌کنیم. می‌دانیم OA، OB، OC، OD، OE شعاع‌های دایره هستند، بنابراین داریم:

$$\begin{cases} OA = OB = R \Rightarrow O \text{ روی عمودمنصف AB است.} \\ OB = OC = R \Rightarrow O \text{ روی عمودمنصف BC است.} \\ OC = OD = R \Rightarrow O \text{ روی عمودمنصف CD است.} \\ OD = OE = R \Rightarrow O \text{ روی عمودمنصف DE است.} \\ OE = OA = R \Rightarrow O \text{ روی عمودمنصف AE است.} \end{cases}$$

نقطه O، نقطه هم‌رسی عمودمنصف‌های اضلاع چندضلعی می‌باشد.

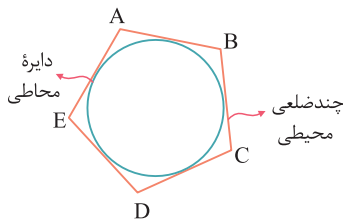


حالت دوم فرض می‌کنیم عمودمنصف‌های اضلاع یک چندضلعی در یک نقطه مانند O هم‌رس باشند. می‌دانیم که هر نقطه روی عمودمنصف یک پاره خط از دو سر پاره خط به یک فاصله است و بالعکس. بنابراین داریم:

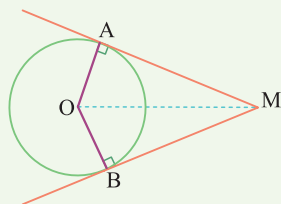
$$\begin{cases} O \text{ روی عمودمنصف AB است.} \Rightarrow OA = OB \\ O \text{ روی عمودمنصف BC است.} \Rightarrow OB = OC \\ O \text{ روی عمودمنصف CD است.} \Rightarrow OC = OD \Rightarrow OA = OB = OC = OD = OE \\ O \text{ روی عمودمنصف DE است.} \Rightarrow OD = OE \\ O \text{ روی عمودمنصف EA است.} \Rightarrow OE = OA \end{cases}$$

چون فاصله نقطه O از نقاط A، B، C، D و E برابر است، پس O مرکز دایره‌ای است که از این نقاط می‌گذرد.

یک چندضلعی را محیطی می‌نامیم، اگر و فقط اگر دایره‌ای موجود باشد که بر همه ضلع‌های آن مماس باشد؛ در این صورت دایره را دایره محاطی آن چندضلعی می‌نامیم.



اثبات

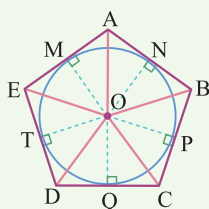


از مرکز دایره یعنی نقطه O به نقاط تماس A و B وصل می‌کنیم. از آن جایی که OA و OB هر دو شعاع‌های دایره‌اند، بنابراین با هم برابرند و با توجه به عمود بودن شعاع دایره بر خط مماس، می‌توان گفت که فاصله نقطه O از دو خط مماس (ضلع‌های زاویه M) یکسان است. پس نقطه O روی نیمساز زاویه M قرار دارد.

(فعالیت صفحه‌های ۲۴ و ۲۵ کتاب درسی)

یک چندضلعی محیطی است، اگر و فقط اگر همه نیمسازهای زاویه‌های آن در یک نقطه هم‌رس باشند.

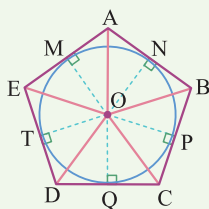
اثبات



با توجه به دوشرطی بودن قضیه، آن را در دو حالت اثبات می‌کنیم:

حالت اول فرض می‌کنیم که دایره‌ای وجود داشته باشد که بر همه اضلاع چندضلعی مماس باشد. از مرکز دایره به نقاط تماس وصل می‌کنیم. می‌دانیم شعاع گذرنده از نقطه تماس بر خط مماس عمود است، هم‌چنین هر نقطه روی نیمساز یک زاویه از دو ضلع آن زاویه به یک فاصله است و بالعکس. بنابراین داریم:

$$\begin{cases} OM = ON = R \Rightarrow O \text{ روی نیمساز } \hat{A} \text{ است.} \\ ON = OP = R \Rightarrow O \text{ روی نیمساز } \hat{B} \text{ است.} \\ OP = OQ = R \Rightarrow O \text{ روی نیمساز } \hat{C} \text{ است.} \\ OQ = OT = R \Rightarrow O \text{ روی نیمساز } \hat{D} \text{ است.} \\ OT = OM = R \Rightarrow O \text{ روی نیمساز } \hat{E} \text{ است.} \end{cases}$$



حالت دوم فرض می‌کنیم همه نیمسازهای زوایای یک چندضلعی در یک نقطه هم‌رس باشند. نقطه هم‌رسی را O می‌نامیم. از O به اضلاع عمود کرده و پای عمودها را M، N، P، Q، T می‌نامیم. می‌دانیم که هر نقطه روی نیمساز یک زاویه از دو ضلع آن زاویه به یک فاصله است و بالعکس. بنابراین داریم:

$$\begin{cases} O \text{ روی نیمساز } \hat{A} \text{ است.} \Rightarrow OM = ON \\ O \text{ روی نیمساز } \hat{B} \text{ است.} \Rightarrow ON = OP \\ O \text{ روی نیمساز } \hat{C} \text{ است.} \Rightarrow OP = OQ \\ O \text{ روی نیمساز } \hat{D} \text{ است.} \Rightarrow OQ = OT \\ O \text{ روی نیمساز } \hat{E} \text{ است.} \Rightarrow OT = OM \end{cases} \Rightarrow OM = ON = OP = OQ = OT$$

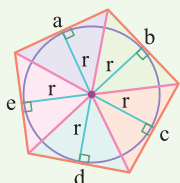
بنابراین فاصله نقطه O تا همه اضلاع چندضلعی برابر است و این بدین معناست که O مرکز دایره‌ای است که بر همه اضلاع چندضلعی مماس است. بنابراین چندضلعی محیطی است.

■ اگر در یک n ضلعی محیطی با مساحت S و محیط $2P$ ، شعاع دایره محاطی برابر r باشد، داریم:

$$r = \frac{S}{P}$$

(کار در کلاس صفحه ۲۵ کتاب درسی)

اثبات



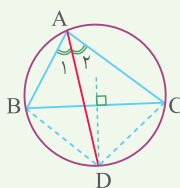
از مرکز دایره به رأس‌های چندضلعی محیطی و هم‌چنین نقاط تماس وصل می‌کنیم. چون شعاع گذرنده از نقطه تماس بر خط مماس عمود است، پس شعاع‌های دایره، ارتفاع‌های مثلث‌های ایجاد شده هستند و داریم:

$$S = \frac{r \cdot a}{2} + \frac{r \cdot b}{2} + \frac{r \cdot c}{2} + \frac{r \cdot d}{2} + \frac{r \cdot e}{2} = r \left(\frac{a + b + c + d + e}{2} \right) \Rightarrow S = r \left(\frac{2P}{2} \right) = rP \Rightarrow r = \frac{S}{P}$$

■ ثابت کنید عمود منصف یک ضلع هر مثلث و نیمساز زاویه مقابل به آن ضلع، یکدیگر را روی دایره محیطی مثلث قطع می‌کنند. (تمرین ۳ صفحه ۲۹ کتاب درسی)

اثبات

فرض می‌کنیم نیمساز زاویه A ، دایره محیطی مثلث را در نقطه D قطع کند. با توجه به شکل زیر، چون AD نیمساز زاویه A است، پس زوایای محاطی $\hat{A}_1$ و $\hat{A}_2$ برابرند و داریم:

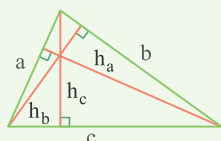


$$\hat{A}_1 = \hat{A}_2 \Rightarrow \frac{\widehat{BD}}{2} = \frac{\widehat{CD}}{2} \Rightarrow \widehat{BD} = \widehat{CD} \Rightarrow BD = CD$$

بنابراین فاصله نقطه D از دو سرپاره خط BC به یک فاصله است و در نتیجه روی عمود منصف ضلع BC قرار دارد.

■ اگر h_a ، h_b و h_c اندازه سه ارتفاع مثلث و r شعاع دایره محاطی داخلی مثلث باشد، نشان دهید $\frac{1}{r} = \frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c}$. (تمرین ۵ صفحه ۳۰ کتاب درسی)

اثبات

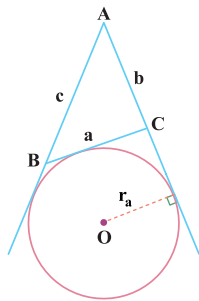


می‌دانیم مساحت هر مثلث برابر «ارتفاع $\times$ قاعده $\times \frac{1}{2}$ » می‌باشد. پس:

$$S = \frac{1}{2} \times a \times h_a \Rightarrow h_a = \frac{2S}{a}, S = \frac{1}{2} \times b \times h_b \Rightarrow h_b = \frac{2S}{b}, S = \frac{1}{2} \times c \times h_c \Rightarrow h_c = \frac{2S}{c}$$

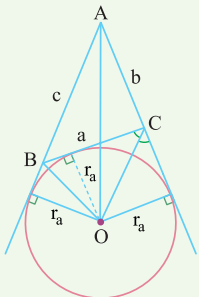
حال داریم:

$$\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c} = \frac{1}{\frac{2S}{a}} + \frac{1}{\frac{2S}{b}} + \frac{1}{\frac{2S}{c}} = \frac{a}{2S} + \frac{b}{2S} + \frac{c}{2S} = \frac{a+b+c}{2S} = \frac{2P}{2S} = \frac{P}{S} = \frac{1}{\frac{S}{P}} = \frac{1}{r}$$



■ ثابت کنید شعاع دایره محاطی خارجی مثلث ABC که بر ضلع BC و امتداد دو ضلع AB و AC مماس است، برابر $r_a = \frac{S}{P-a}$ می باشد. (فعالیت صفحه ۲۶ کتاب درسی)

اثبات



از نقطه O (مرکز دایره) به سه رأس A، B و C وصل می کنیم. مساحت مثلث ABC برابر است با:

$$S_{\triangle ABC} = S_{\triangle OAC} + S_{\triangle OAB} - S_{\triangle OBC}$$

واضح است که ارتفاع هر سه مثلث برابر r_a می باشد. پس:

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} \times b \times r_a + \frac{1}{2} \times c \times r_a - \frac{1}{2} \times a \times r_a = \frac{1}{2} r_a (b + c - a) \\ &= \frac{1}{2} r_a (\overbrace{b+c+a}^{2P} - a - a) = \frac{1}{2} r_a (2P - 2a) = r_a (P - a) \Rightarrow S = r_a (P - a) \Rightarrow r_a = \frac{S}{P - a} \end{aligned}$$

■ اگر r_a ، r_b و r_c شعاع های سه دایره محاطی خارجی مثلث و شعاع دایره محاطی داخلی باشد، نشان دهید: $\frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_b} + \frac{1}{r_c} = \frac{1}{r}$ (تمرین ۵ صفحه ۲۹ کتاب درسی)

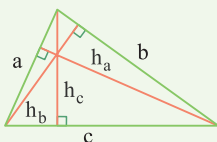
اثبات

با توجه به رابطه اندازه شعاع های دایره محاطی خارجی مثلث داریم:

$$\frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_b} + \frac{1}{r_c} = \frac{\frac{1}{2} \times \overbrace{b+c+a}^{2P} - a}{S} + \frac{\frac{1}{2} \times \overbrace{a+c+b}^{2P} - b}{S} + \frac{\frac{1}{2} \times \overbrace{a+b+c}^{2P} - c}{S} = \frac{2P - (a+b+c)}{S} = \frac{2P - 2P}{S} = \frac{0}{S} = 0$$

■ اگر h_a ، h_b و h_c اندازه سه ارتفاع مثلث و شعاع دایره محاطی داخلی باشد، نشان دهید $\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c} = \frac{1}{r}$ می باشد.

اثبات



می دانیم مساحت هر مثلث برابر «ارتفاع × قاعده × $\frac{1}{2}$ » می باشد. پس:

$$S = \frac{1}{2} \times a \times h_a \Rightarrow h_a = \frac{2S}{a}$$

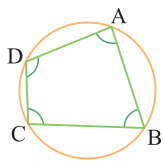
$$S = \frac{1}{2} \times b \times h_b \Rightarrow h_b = \frac{2S}{b}$$

$$S = \frac{1}{2} \times c \times h_c \Rightarrow h_c = \frac{2S}{c}$$

$$\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c} = \frac{a}{2S} + \frac{b}{2S} + \frac{c}{2S} = \frac{a+b+c}{2S} = \frac{2P}{2S} = \frac{P}{S} = \frac{1}{\frac{S}{P}} = \frac{1}{r}$$

حال داریم:

یک چهارضلعی، محاطی است، اگر و فقط اگر دو زاویه مقابل آن مکمل باشند.



$$ABCD \text{ محاطی است. } \Leftrightarrow \hat{A} + \hat{C} = \hat{B} + \hat{D} = 180^\circ$$

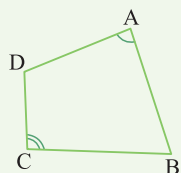
اثبات

از آن جایی که قضیه، دوشرطی است پس آن را در دو حالت ثابت می‌کنیم:

حالت اول فرض می‌کنیم چهارضلعی ABCD محاطی باشد. چون زوایای A و C محاطی هستند، داریم:

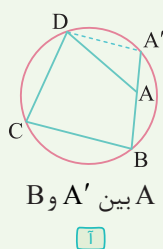
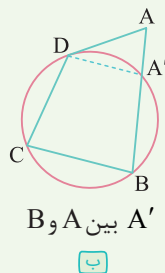
$$\begin{cases} \hat{A} = \frac{\widehat{BCD}}{2} \\ \hat{C} = \frac{\widehat{BAD}}{2} \end{cases} \Rightarrow \hat{A} + \hat{C} = \frac{\widehat{BCD} + \widehat{BAD}}{2} = \frac{360^\circ}{2} = 180^\circ$$

به طریق مشابه چون زوایای B و D محاطی هستند، ثابت می‌شود $\hat{B} + \hat{D} = 180^\circ$ است.



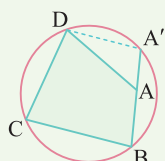
حالت دوم فرض می‌کنیم $\hat{A}$ و $\hat{C}$ مکمل باشند. با برهان خلف ثابت می‌کنیم چهارضلعی ABCD محاطی است.

از آن جایی که مثلث همواره محاطی است، بنابراین از سه رأس C، B و D همواره یک دایره عبور می‌کند (دایره محیطی مثلث). حال اگر این دایره مطابق با شکل‌های زیر از رأس A نگذرد و خط AB را در نقطه‌ای دیگر مانند A' قطع کند، دو حالت زیر به وجود می‌آید:



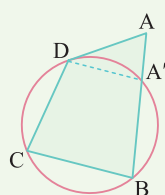
الف بین A و A' و B قرار بگیرد. در این حالت چهارضلعی A'BCD محاطی است، بنابراین $\hat{A'} + \hat{C} = 180^\circ$ می‌باشد.

از طرفی طبق فرض $\hat{A} + \hat{C} = 180^\circ$ می‌باشد، پس $\hat{A} = \hat{A'}$ است. با توجه به اینکه زاویه A زاویه خارجی مثلث ADA' است، بنابراین $\hat{A} > \hat{A'}$ و این با نتیجه به دست آمده یعنی $\hat{A} = \hat{A'}$ تناقض دارد. پس A همان A' است.



ب بین A و B قرار بگیرد. در این حالت چهارضلعی A'BCD محاطی است، بنابراین $\hat{A'} + \hat{C} = 180^\circ$ می‌باشد.

از طرفی طبق فرض $\hat{A} + \hat{C} = 180^\circ$ می‌باشد، پس $\hat{A} = \hat{A'}$ است. با توجه به اینکه زاویه A' زاویه خارجی مثلث ADA' است، بنابراین $\hat{A} > \hat{A'}$ و این با نتیجه به دست آمده یعنی $\hat{A} = \hat{A'}$ تناقض است. پس A همان A' است.



با توجه به حالت‌های آ و ب، فرض خلف باطل است. بنابراین A هم روی دایره گذرنده از B، C و D قرار دارد و در نتیجه چهارضلعی ABCD محاطی است.

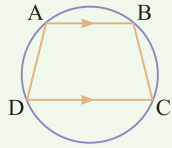
(تمرین ۱ صفحه ۲۹ کتاب درسی)

■ ثابت کنید یک دوزنقه محاطی است، اگر و تنها اگر متساوی الساقین باشد.

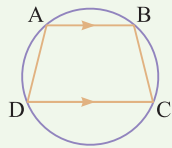
اثبات

چون گزاره دو شرطی است، پس آن را در دو حالت ثابت می‌کنیم.

حالت اول فرض می‌کنیم دوزنقه محاطی باشد، پس $\hat{A} + \hat{C} = 180^\circ$ است. از طرفی در دوزنقه زوایای مجاور به ساق مکمل‌اند، پس $\hat{A} + \hat{D} = 180^\circ$ است و در نتیجه $\hat{C} = \hat{D}$ می‌باشد و این یعنی دوزنقه ABCD متساوی الساقین است.



حالت دوم فرض می‌کنیم دوزنقه ABCD متساوی الساقین باشد، پس $\hat{A} = \hat{B}$ ، $\hat{C} = \hat{D}$ ، $\hat{A} + \hat{D} = 180^\circ$ و $\hat{B} + \hat{C} = 180^\circ$ است.



$$\begin{cases} \hat{A} + \hat{D} = 180^\circ \\ \hat{C} = \hat{D} \end{cases} \Rightarrow \hat{A} + \hat{C} = 180^\circ$$

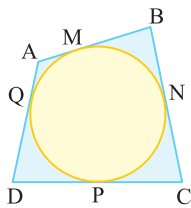
$\Rightarrow$ دوزنقه ABCD محاطی است.

$$\begin{cases} \hat{A} + \hat{D} = 180^\circ \\ \hat{A} = \hat{B} \end{cases} \Rightarrow \hat{B} + \hat{D} = 180^\circ$$

حال داریم:

■ یک چهارضلعی محیطی است اگر و فقط اگر مجموع اندازه‌های دو ضلع مقابل، برابر مجموع اندازه‌های دو ضلع دیگر باشند. (صفحه ۲۷ کتاب درسی)

۲۷ کتاب درسی)

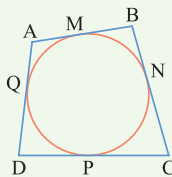


$$AB + CD = AD + BC \Leftrightarrow \text{ABCD محیطی است.}$$

اثبات

با توجه به دو شرطی بودن قضیه، آن را در دو حالت اثبات می‌کنیم:

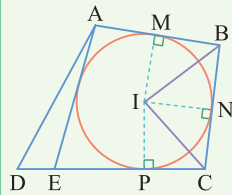
حالت اول فرض می‌کنیم چهارضلعی ABCD محیطی است. می‌دانیم اگر از نقطه‌ای خارج دایره، دو مماس بر آن رسم کنیم، طول‌های برابر خواهند داشت. بنابراین در شکل مقابل داریم:



$$AM = AQ, BM = BN, CN = CP, DP = DQ$$

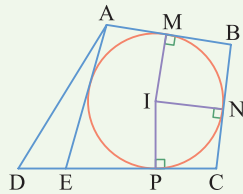
حال $AB + CD$ برابر است با:

$$\begin{aligned} AB + CD &= (AM + BM) + (CP + DP) = (AQ + BN) + (CN + DQ) \\ &= (AQ + DQ) + (BN + CN) = AD + BC \Rightarrow AB + CD = AD + BC \end{aligned}$$



حالت دوم فرض می‌کنیم $AB + CD = BC + AD$ باشد، می‌خواهیم نشان دهیم چهارضلعی ABCD محیطی است. نیمسازهای زوایای B و C را رسم می‌کنیم تا یکدیگر را در نقطه‌ای مانند I قطع کنند. از آن جایی که نقطه I روی نیمساز زوایای B و C قرار دارد. بنابراین فاصله‌اش از سه ضلع AB، BC و CE یکسان است. به عبارت دیگر $IM = IN = IP$. در نتیجه اگر دایره‌ای به مرکز I و شعاع یکی از این فاصله‌ها (IM یا IN یا IP) رسم کنیم، بر سه ضلع AB، BC و CE مماس خواهد شد. حال با استفاده از برهان خلف ثابت می‌کنیم AD هم بر دایره رسم شده، مماس است. فرض می‌کنیم دایره بر AD مماس نباشد. از نقطه A مماس بر دایره رسم می‌کنیم تا خط CD را در E قطع کند. یکی از دو حالت زیر را خواهیم داشت.

الف بین E و P قرار بگیرد:



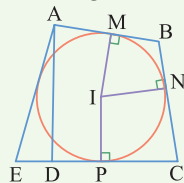
چهارضلعی ABCE محیطی است، پس $AE + BC = AB + CE$ می‌باشد، از طرفی با توجه به فرض $AD + BC = AB + CD$ است، پس:

$$\begin{cases} AE + BC = AB + CE \\ AD + BC = AB + CD \end{cases} \Rightarrow (AD + BC) - (AE + BC) = (AB + CD) - (AB + CE)$$

$$\Rightarrow AD - AE = \underbrace{CD - CE}_{DE} \Rightarrow AD - AE = DE \Rightarrow AD = AE + DE$$

از طرفی با توجه به نامساوی مثلث در مثلث AED، $AD < AE + DE$ است که با نتیجه به دست آمده در تناقض است، پس فرض خلف باطل و نقطه E همان نقطه D است و دایره بر ضلع AD مماس می‌باشد.

ب بین E و P قرار بگیرد:



چهارضلعی ABCE محیطی است، پس $AE + BC = AB + EC$ می‌باشد. از طرفی با توجه به فرض $AD + BC = AB + CD$ است، پس:

$$\begin{cases} AE + BC = AB + EC \\ AD + BC = AB + CD \end{cases} \Rightarrow (AE + BC) - (AD + BC) = (AB + EC) - (AB + CD)$$

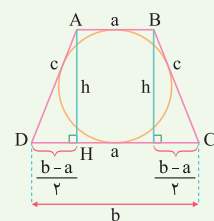
$$\Rightarrow AE - AD = \underbrace{EC - CD}_{ED} \Rightarrow AE - AD = ED \Rightarrow AE = AD + ED$$

از طرفی با توجه به نامساوی مثلث در مثلث AED، $AE < AD + ED$ و این با نتیجه به دست آمده در تناقض است. پس نقطه E همان نقطه D بوده و این یعنی دایره بر AD مماس است.

یک دوزنقه هم محیطی است و هم محاطی. ثابت کنید مساحت این دوزنقه برابر است با میانگین حسابی دو قاعده آن ضرب در میانگین هندسی آن‌ها.

(تمرین ۴ صفحه ۲۹ کتاب درسی)

اثبات



می‌دانیم اگر دوزنقه‌ای محاطی باشد، حتماً متساوی الساقین است. از طرفی چون دوزنقه محیطی است، داریم:

$$AD + BC = AB + CD \Rightarrow c + c = a + b \Rightarrow c = \frac{a + b}{2}$$

$$AD^2 = AH^2 + DH^2 \Rightarrow c^2 = h^2 + \left(\frac{b-a}{2}\right)^2$$

حال به کمک قضیه فیثاغورس در مثلث ADH داریم:

$$\xRightarrow{c = \frac{a+b}{2}} \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 = h^2 + \left(\frac{b-a}{2}\right)^2 \Rightarrow h^2 = ab \Rightarrow h = \sqrt{ab} \Rightarrow S = \frac{(a+b)h}{2} = \frac{(a+b)}{2} \sqrt{ab}$$

می‌دانیم $\frac{a+b}{2}$ میانگین حسابی دو قاعده و $\sqrt{ab}$ میانگین هندسی دو قاعده می‌باشد.

اثبات

فرض می‌کنیم اندازه هر زاویه n ضلعی منتظم $ABCD \dots$ ، 2α باشد؛ عمود منصف‌های دو ضلع AB و BC را رسم می‌کنیم تا یکدیگر را در O قطع کنند. از O به A ، B و C وصل می‌کنیم. از آنجایی که O روی عمود منصف AB و BC قرار دارد، پس $OA = OB = OC$ می‌باشد. بنابراین مثلث‌های OAB و OBC با سه ضلع برابر، هم‌نهشت هستند و داریم:

$$\begin{cases} OA = OB \\ OB = OC \\ AB = BC \end{cases} \xrightarrow{\text{ض ض ض}} \triangle OAB \cong \triangle OBC \Rightarrow \widehat{OAB} = \widehat{OBA} = \widehat{OBC} = \widehat{OCB} = \alpha$$

حال از D به O وصل می‌کنیم و داریم:

$$\widehat{OCD} = \widehat{BCD} - \widehat{BCO} = 2\alpha - \alpha = \alpha$$

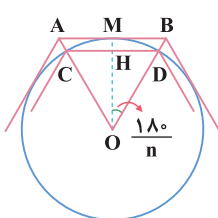
مثلث‌های OBC و OCD به حالت ض ض ض هم‌نهشت هستند:

$$\begin{cases} OC = OC \text{ (مشترک)} \\ \widehat{OCD} = \widehat{BCO} = \alpha \\ BC = CD \text{ (منتظم)} \end{cases} \xrightarrow{\text{ض ض ض}} \triangle OBC \cong \triangle OCD \Rightarrow OA = OB = OC = OD$$

با ادامه این روند داریم:

$$OA = OB = OC = OD = \dots, OH = OM = ON = \dots$$

بنابراین O از همه رأس‌ها به یک فاصله می‌باشد، یعنی نقطه هم‌رسی عمود منصف‌ها و مرکز دایره‌ای است که از همه رأس‌های n ضلعی منتظم می‌گذرد. بنابراین n ضلعی منتظم، محاطی است. هم‌چنین O از همه ضلع‌ها نیز به یک فاصله است، یعنی نقطه هم‌رسی نیمسازها و مرکز دایره‌ای است که بر همه اضلاع n ضلعی منتظم مماس است. بنابراین n ضلعی منتظم، محیطی است.



یک دایره به شعاع r و n ضلعی‌های منتظم محاطی و محیطی در آن را در نظر بگیرید. نشان دهید اگر AB و CD اندازه‌های ضلع‌های n ضلعی منتظم محیطی و محاطی باشند، آن‌گاه:

$$\text{الف) } AB = 2r \tan \frac{180^\circ}{n}$$

$$\text{ب) } CD = 2r \sin \frac{180^\circ}{n}$$

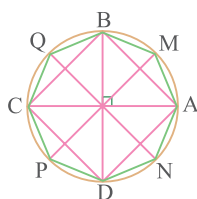
اثبات

الف) در مثلث OMB خواهیم داشت:

$$\tan \frac{180^\circ}{n} = \frac{MB}{MO} = \frac{\frac{AB}{2}}{r} \Rightarrow AB = 2r \tan \frac{180^\circ}{n}$$

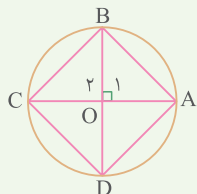
ب) در مثلث OHD خواهیم داشت:

$$\sin \frac{180^\circ}{n} = \frac{HD}{OD} = \frac{\frac{CD}{2}}{r} \Rightarrow CD = 2r \sin \frac{180^\circ}{n}$$



■ دو قطر عمود بر هم AC و BD از یک دایره را رسم می‌کنیم: چرا چهارضلعی ABCD مربع است؟
عمودمنصف‌های ضلع‌های این مربع را رسم کنید تا دایره را قطع کنند. نشان دهید هشت ضلعی
AMBQCPDN منتظم است.
(تمرین ۸ صفحه ۳۰ کتاب درسی)

اثبات



ابتدا نشان می‌دهیم چهارضلعی ABCD مربع است. مثلث‌های AOB و COB هم‌نهشت هستند، زیرا:

$$\begin{cases} OA = OC \\ \widehat{O}_1 = \widehat{O}_2 = 90^\circ \\ OB = OB \end{cases} \xRightarrow{\text{ض ض ض}} \triangle AOB \cong \triangle COB$$

بنابراین اجزای متناظر آن‌ها از جمله AB و BC برابرند. به طریق مشابه می‌توان ثابت کرد که $BC = CD$ ، $CD = AD$ و $AB = AD$ هستند، پس
چهارضلعی ABCD لوزی است. از طرفی چون زاویه $\widehat{BAD}$ زاویه محاطی رو به نیم‌دایره است، پس $\widehat{BAD} = 90^\circ$ می‌باشد. لوزی‌ای که یک زاویه قائمه
داشته باشد، مربع است.

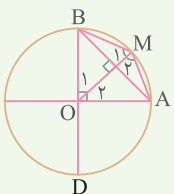
حال نشان می‌دهیم هشت ضلعی AMBQCPDN منتظم است. مثلث AOB متساوی‌الساقین است، چون $OA = OB$ می‌باشد. بنابراین
عمودمنصف OM (عمودمنصف متناظر با قاعده مثلث متساوی‌الساقین AOB) نیمساز زاویه O نیز می‌باشد. پس $\widehat{O}_1 = \widehat{O}_2 = 45^\circ$ است.

از طرفی مثلث‌های AOM و BOM هم‌نهشت هستند، زیرا:

$$\begin{cases} OA = OB \\ \widehat{O}_1 = \widehat{O}_2 = 45^\circ \\ OM = OM \end{cases} \xRightarrow{\text{ض ض ض}} \triangle AOM \cong \triangle BOM$$

بنابراین اجزای متناظر دو مثلث برابرند، پس $AM = BM$ و $\widehat{M}_1 = \widehat{M}_2$ می‌باشند و داریم:

$$\widehat{M}_1 = \widehat{M}_2 = \frac{180^\circ - \widehat{O}_1}{2} = \frac{180^\circ - 45^\circ}{2} = \frac{135^\circ}{2}$$



$$\widehat{M} = \widehat{M}_1 + \widehat{M}_2 = \frac{135^\circ}{2} + \frac{135^\circ}{2} = 135^\circ$$

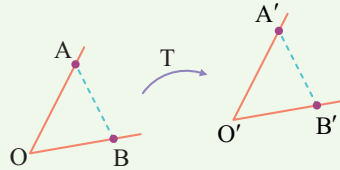
به طریق مشابه می‌توان نشان داد تمام زوایای هشت ضلعی برابر 135° و تمامی اضلاع با هم برابرند، پس هشت ضلعی مورد نظر منتظم است.

(فعالیت صفحه ۳۴ کتاب درسی)

در هر تبدیل طولیا، تبدیل یافته هر زاویه، زاویه ای هم اندازه آن است.

اثبات

فرض می‌کنیم T یک تبدیل طولیا باشد و $T(A) = A'$ ، $T(B) = B'$ و $T(O) = O'$ باشند. پس $OA = O'A'$ ، $OB = O'B'$ و $AB = A'B'$ است. بنابراین مثلث‌های AOB و $A'O'B'$ با سه ضلع برابر هم‌نهشت هستند و در نتیجه زاویه‌های نظیر آن‌ها نیز برابر است، یعنی $\widehat{AOB} = \widehat{A'O'B'}$ می‌باشد.

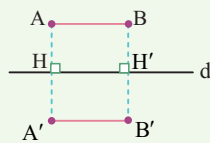


(فعالیت صفحه ۳۶ کتاب درسی)

بازتاب یک تبدیل طولیا (ایزومتري) است.

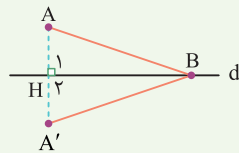
اثبات

حالت‌های مختلف یک پاره خط را نسبت به خط بازتاب d در نظر می‌گیریم.



حالت اول پاره خط AB موازی خط d باشد. ابتدا بازتاب A و B را نسبت به خط d پیدا کرده و آن‌ها را A' و B' می‌نامیم. چهارضلعی $ABB'A'$ مستطیل است؛ چون پاره خط AB موازی خط d است پس $AH = BH'$ بوده و با توجه به این که در بازتاب $AH = A'H$ و $BH' = B'H'$ می‌باشد، پس $AA' = BB'$ بوده و چون هر دو بر خط d عمودند، پس چهارضلعی $ABB'A'$ متوازی الاضلاع است.

از طرفی از آنجایی که $d \parallel AB$ و AH بر d عمود است پس بر AB نیز عمود بوده و زاویه A در متوازی الاضلاع $ABB'A'$ قائمه است. می‌دانیم متوازی الاضلاعی که یک زاویه قائمه دارد، مستطیل است. در مستطیل اضلاع مقابل باهم برابرند، پس $AB = A'B'$ می‌باشد. (البته بعد از این که فهمیدیم $ABB'A'$ متوازی الاضلاع است، می‌توانیم نتیجه بگیریم که $AB = A'B'$ و نیازی به نشان دادن مستطیل بودن $ABB'A'$ نیست).



حالت دوم یکی از نقاط انتهایی پاره خط AB روی خط d باشد.

بازتاب نقطه A را نسبت به خط d پیدا کرده و آن را A' می‌نامیم.

واضح است که بازتاب نقطه B خود B است.

روش اول باتوجه به تعریف بازتاب داریم:

$$\begin{cases} AH = A'H \\ BH = BH \\ \widehat{AH_1} = \widehat{AH_2} = 90^\circ \end{cases} \xRightarrow{\text{قضیه}} \triangle ABH \cong \triangle A'BH$$

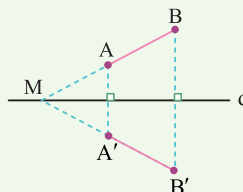
از هم‌نهشتی مثلث‌های ABH و $A'BH$ می‌توان نتیجه گرفت که $AB = A'B$ است.

روش دوم خط d عمود منصف پاره خط AA' است، چون نقطه B روی خط d قرار دارد، پس فاصله‌اش تا دو سر پاره خط برابر است، بنابراین $AB = A'B$ می‌باشد.

حالت سوم دو نقطه ابتدا و انتهایی پاره خط روی خط بازتاب باشد. در این حالت تصویر پاره خط بر پاره خط منطبق خواهد شد، پس $AB = A'B'$ می‌باشد.

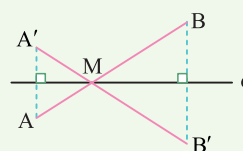


حالت چهارم پاره خط AB با خط d نه موازی و نه متقاطع باشد. پاره خط AB را امتداد می دهیم تا خط بازتاب را در نقطه M قطع کند. نقطه B' ، بازتاب نقطه B را نسبت به خط بازتاب پیدا کرده و پاره خط MB' را رسم می کنیم. از آن جایی که بازتاب هر پاره خط یک پاره خط می باشد، پس چون نقطه A روی MB است، نقطه A' ، بازتاب نقطه A نسبت به خط بازتاب روی MB' قرار دارد. حال داریم:



$$\begin{cases} AB = MB - MA \\ A'B' = MB' - MA' \end{cases} \xrightarrow[\overline{MA=MA'}]{\overline{MB=MB'}} AB = A'B'$$

حالت پنجم پاره خط AB خط بازتاب را در نقطه M قطع می کند. بازتاب نقطه A را نسبت به خط d پیدا کرده و آن را A' می نامیم. پاره خط MA' را رسم کرده و ادعا می کنیم که بازتاب نقطه B یعنی B' هم بر امتداد MA' واقع است، زیرا تصویر هر پاره خط در بازتاب یک پاره خط است و در نتیجه A' ، M و B' در یک راستا قرار دارند. حال داریم:

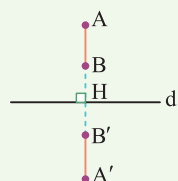


$$\begin{cases} AB = AM + MB \\ A'B' = A'M + MB' \end{cases} \xrightarrow[\overline{MB=MB'}]{\overline{AM=A'M}} AB = A'B'$$

(تمرین ۱ صفحه ۴۲ کتاب درسی)

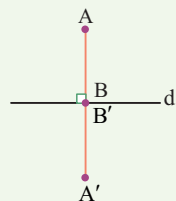
حالت ششم پاره خط AB عمود بر محور بازتاب است. این حالت را در سه وضعیت زیر بررسی می کنیم:

۱ A و B هر دو در یک طرف خط بازتاب قرار دارند. تصویر نقاط A و B را در بازتاب نسبت به خط d پیدا کرده و آن ها را به ترتیب A' و B' می نامیم. باتوجه به تعریف بازتاب داریم:

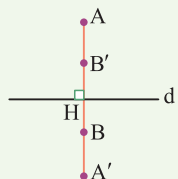


$$\begin{cases} AH = A'H \\ BH = B'H \end{cases} \Rightarrow AH - BH = A'H - B'H \Rightarrow AB = A'B'$$

۲ یکی از نقاط A یا B روی خط بازتاب قرار دارد. بازتاب نقطه A نقطه A' و بازتاب نقطه B برخوردش منطبق است، با توجه به تعریف بازتاب $AB = A'B$ و در نتیجه $AB = A'B'$ می باشد.



۳ A و B در طرفین خط بازتاب قرار دارند. تصاویر A و B را نسبت به خط d بازتاب داده و A' و B' می نامیم. با توجه به تعریف بازتاب داریم:



$$\begin{cases} AH = A'H \\ BH = B'H \end{cases} \Rightarrow AH + BH = A'H + B'H \Rightarrow AB = A'B'$$

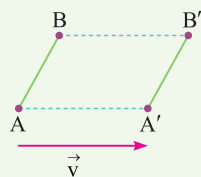
اثبات

حالت اول پاره خط AB با بردار $\vec{v}$ موازی است. حال در سه وضعیت که اندازه بردار $\vec{v}$ از اندازه پاره خط AB کوچک تر باشد یا اندازه بردار $\vec{v}$ از اندازه پاره خط AB بزرگ تر باشد و یا اندازه بردار $\vec{v}$ با اندازه پاره خط AB مساوی باشد، نشان می دهیم انتقال یک تبدیل طولپا است؛ یعنی اندازه پاره خط AB با اندازه تصویرش یعنی اندازه پاره خط $A'B'$ برابر است:

$$\text{۱} \quad \begin{array}{c} \vec{v} \\ \text{A} \quad \text{A}' \quad \text{B} \quad \text{B}' \end{array} \Rightarrow \begin{cases} AB = AA' + A'B \\ A'B' = A'B + BB' \end{cases} \xrightarrow{AA' = BB' = |\vec{v}|} \begin{cases} AB = |\vec{v}| + A'B \\ A'B' = A'B + |\vec{v}| \end{cases} \Rightarrow AB = A'B'$$

$$\text{۲} \quad \begin{array}{c} \vec{v} \\ \text{A} \quad \text{B} \quad \text{A}' \quad \text{B}' \end{array} \Rightarrow \begin{cases} AB = AA' - A'B \\ A'B' = BB' - A'B \end{cases} \xrightarrow{AA' = BB' = |\vec{v}|} \begin{cases} AB = |\vec{v}| - A'B \\ A'B' = |\vec{v}| - A'B \end{cases} \Rightarrow AB = A'B'$$

$$\text{۳} \quad \begin{array}{c} \vec{v} \\ \text{A} \quad \text{A}' \quad \text{B} \quad \text{B}' \end{array} \Rightarrow \begin{cases} AB = AA' \\ A'B' = BB' \end{cases} \xrightarrow{AA' = BB' = |\vec{v}|} \begin{cases} AB = |\vec{v}| \\ A'B' = |\vec{v}| \end{cases} \Rightarrow AB = A'B'$$



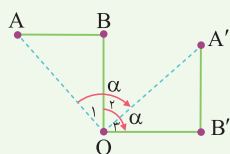
حالت دوم پاره خط AB با بردار $\vec{v}$ موازی نیست. مطابق شکل، تصویر نقاط A و B را به ترتیب A' و B' می نامیم. چون $AA' = BB' = \vec{v}$ و $AA' \parallel BB' \parallel \vec{v}$ ، بنابراین چهارضلعی $AA'B'B$ متوازی الاضلاع است و در نتیجه $AB = A'B'$ می باشد. پس انتقال یک تبدیل طولپا است.

اثبات

مطابق اثبات ویژگی ۱ در حالتی که پاره خط AB با بردار $\vec{v}$ موازی است، واضح است که نقاط A ، B ، A' و B' در یک راستا قرار دارند، پس AB و $A'B'$ موازی اند و در حالتی که پاره خط AB با بردار $\vec{v}$ موازی نیست، چون چهارضلعی $AA'B'B$ متوازی الاضلاع است، پس $AB \parallel A'B'$ بوده و این یعنی شیب AB و $A'B'$ برابر است.

اثبات
حالت اول

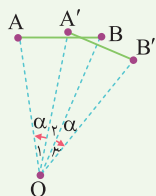
مرکز دوران یعنی O، برپاره خط AB یا امتداد آن واقع نباشد و زاویه دوران از زاویه $\widehat{AOB}$ بیشتر باشد. با توجه به شکل زیر داریم:



$$\widehat{O}_1 + \widehat{O}_2 = \widehat{O}_3 + \widehat{O}_4 = \alpha \Rightarrow \widehat{O}_1 = \widehat{O}_3$$

با توجه به تعریف دوران، $OA = OA'$ و $OB = OB'$ می‌باشند، از طرفی $\widehat{O}_1 = \widehat{O}_3$ است، پس دو مثلث AOB و A'O'B' به حالت ض ض ض هم‌نهشت هستند، پس اجزای متناظر آن‌ها با هم برابرند و این یعنی $AB = A'B'$ می‌باشد.

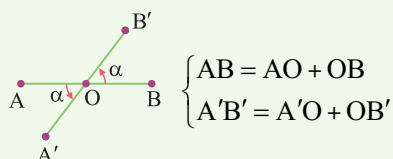
حالت دوم مرکز دوران یعنی O، برپاره خط AB یا امتداد آن واقع نباشد و زاویه دوران از زاویه $\widehat{AOB}$ کمتر باشد. با توجه به شکل زیر داریم:



$$\widehat{O}_1 = \widehat{O}_3 = \alpha \Rightarrow \widehat{O}_1 + \widehat{O}_2 = \widehat{O}_3 + \widehat{O}_4$$

با توجه به تعریف دوران، $OA = OA'$ و $OB = OB'$ می‌باشند. از طرفی چون $\widehat{O}_1 + \widehat{O}_2 = \widehat{O}_3 + \widehat{O}_4$ است، پس دو مثلث AOB و A'O'B' به حالت ض ض ض هم‌نهشت هستند. بنابراین اجزای متناظر آن‌ها از جمله AB و A'B' با هم برابرند. توجه کنید در حالتی که اندازه زاویه $\widehat{AOB}$ با زاویه دوران برابر باشد. اثبات دقیقاً مانند حالت بالا است.

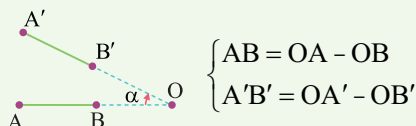
حالت سوم مرکز دوران یعنی O روی پاره خط AB باشد. با توجه به شکل زیر داریم:



با توجه به تعریف دوران $OA = OA'$ و $OB = OB'$ است، پس:

$$\begin{cases} AB = OA + OB \\ A'B' = OA' + OB' \end{cases} \xrightarrow[\substack{OA=OA' \\ OB=OB'}]{\substack{OA=OA' \\ OB=OB'}} AB = A'B'$$

حالت چهارم مرکز دوران یعنی O روی امتداد پاره خط AB باشد. با توجه به شکل زیر داریم:



با توجه به تعریف دوران $OA = OA'$ و $OB = OB'$ است، پس:

$$\begin{cases} AB = OA - OB \\ A'B' = OA' - OB' \end{cases} \xrightarrow[\substack{OA=OA' \\ OB=OB'}]{\substack{OA=OA' \\ OB=OB'}} AB = A'B'$$

(قضیه صفحه ۴۶ کتاب درسی)

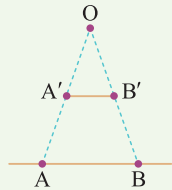
تجانس، شیب خط را حفظ می‌کند.

اثبات

حالت اول اگر مرکز تجانس یعنی نقطه O روی خط AB باشد، مطابق شکل مجانس های A و B یعنی A' و B' روی خط AB قرار می‌گیرند، بنابراین شیب AB و A'B' یکسان است.

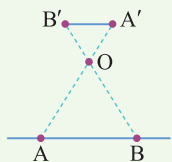


حالت دوم اگر مرکز تجانس یعنی نقطه O روی خط AB نباشد، با توجه به شکل زیر و خواص تجانس با نسبت $k > 0$ داریم:



$$\begin{cases} OA' = |k| \cdot OA \\ OB' = |k| \cdot OB \end{cases} \Rightarrow \frac{OA'}{OA} = \frac{OB'}{OB} = |k|$$

بنابراین طبق عکس قضیه تالس $AB \parallel A'B'$ است، پس شیب خطوط AB و A'B' برابر است.



$$\begin{cases} OA' = |k| \cdot OA \\ OB' = |k| \cdot OB \\ A'B' = |k| \cdot AB \end{cases} \Rightarrow \frac{OA'}{OA} = \frac{OB'}{OB} = \frac{A'B'}{AB} = |k|$$

اگر $k < 0$ باشد، با توجه به شکل مقابل داریم:

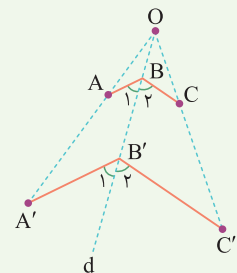
بنابراین دو مثلث OAB و OA'B' متشابه‌اند، پس زاویه‌های نظیر آن‌ها برابرند و این یعنی $\hat{A} = \hat{A}'$ بوده و طبق عکس قضیه خطوط موازی و مورب، $AB \parallel A'B'$ است.

(قضیه صفحه ۴۷ کتاب درسی)

تجانس، اندازه زاویه را حفظ می‌کند.

اثبات

مجانس زاویه ABC را نسبت به مرکز O و نسبت تجانس k رسم می‌کنیم. از آن جایی که تجانس شیب خطوط را حفظ می‌کند، پس $AB \parallel A'B'$ و $BC \parallel B'C'$ می‌باشد. حال طبق قضیه خطوط موازی و مورب داریم:



$$\begin{cases} AB \parallel A'B' \xrightarrow{\text{مورب d}} \hat{B}_1 = \hat{B}'_1 \\ BC \parallel B'C' \xrightarrow{\text{مورب d}} \hat{B}_2 = \hat{B}'_2 \end{cases} \Rightarrow \hat{B}_1 + \hat{B}_2 = \hat{B}'_1 + \hat{B}'_2 \Rightarrow \hat{B} = \hat{B}'$$

(کار در کلاس صفحه ۴۷ کتاب درسی)

در تجانس با نسبت k، شکل و مجانس آن با هم متشابه‌اند.

اثبات

فرض می‌کنیم n ضلعی $A_1A_2 \dots A_n$ به مرکز O و نسبت تجانس k باشد، از آن جایی که تجانس اندازه زاویه را حفظ کرده و طول پاره خط‌ها را $|k|$ برابر می‌کند، داریم:

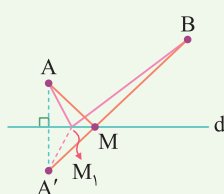
$$\begin{cases} \frac{A'_1A'_2}{A_1A_2} = \frac{A'_2A'_3}{A_2A_3} = \dots = \frac{A'_nA'_1}{A_nA_1} = |k| \\ \hat{A}_1 = \hat{A}'_1, \hat{A}_2 = \hat{A}'_2, \dots, \hat{A}_n = \hat{A}'_n \end{cases}$$

بنابراین چون در دو n ضلعی، اضلاع نظیر متناسب و زوایای نظیر برابر هستند، پس دو n ضلعی متشابه‌اند.

■ اگر A و B در یک طرف خط d باشند، کافی است بازتاب نقطه A را نسبت به خط d پیدا کرده و آن را A' بنامیم. اگر A' را به B وصل کنیم، پاره خط A'B خط d را در نقطه M قطع می‌کند که M نقطه مطلوب است. توجه کنید به جای بازتاب نقطه A می‌توانیم بازتاب نقطه B را نیز پیدا کنیم و سپس مراحل فوق را اجرا کنیم تا نقطه M معلوم شود.



اثبات



برای هر نقطه دلخواه دیگری نظیر M_1 ، با توجه به ویژگی‌های بازتاب $M_1A = M_1A'$ و هم‌چنین $AM = A'M$ است. حال در مثلث $A'M_1B$ با توجه به نامساوی مثلثی داریم:

$$A'M_1 + M_1B > A'B$$

$$A'M_1 + M_1B > A'M + MB \Rightarrow AM_1 + M_1B > AM + MB$$

از طرفی $A'B = A'M + MB$ می‌باشد، پس:

بنابراین در هر نقطه‌ای دیگر به جز M مانند M_1 ، مسیری طولانی‌تر خواهیم داشت.

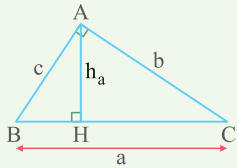
(تمرین ۱ صفحه ۶۳ کتاب درسی)

در هر مثلث قائم الزاویه ABC ($\hat{A} = 90^\circ$) با ارتفاع h_a ، رابطه $\frac{1}{h_a^2} = \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}$ برقرار است.

اثبات

$$\frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} = \frac{c^2 + b^2}{b^2 c^2} = \frac{b^2 + c^2}{(bc)^2}$$

$$\frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} \text{ برابر است با:}$$



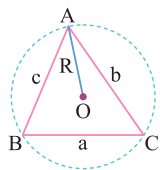
$$\begin{cases} a^2 = b^2 + c^2 \\ bc = ah_a \end{cases}$$

حال به کمک روابط طولی در مثلث قائم الزاویه ABC داریم:

$$\frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} = \frac{a^2}{(ah_a)^2} \Rightarrow \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} = \frac{a^2}{a^2 h_a^2} \Rightarrow \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} = \frac{1}{h_a^2}$$

$$\text{با جای گذاری روابط فوق در } \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} = \frac{b^2 + c^2}{(bc)^2} \text{ داریم:}$$

قضیه سینوس ها: در مثلث ABC با اضلاع $BC = a$ ، $AC = b$ و $AB = c$ رابطه زیر برقرار است که در آن شعاع دایره محیطی مثلث ABC است.

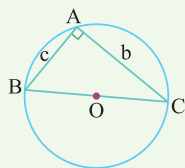


$$\frac{a}{\sin \hat{A}} = \frac{b}{\sin \hat{B}} = \frac{c}{\sin \hat{C}} = 2R$$

اثبات

در سه حالت قضیه را اثبات می کنیم:

(فعالیت ۲، ۳ و ۴ صفحه های ۶۰ و ۶۱ کتاب درسی)



می دانیم عمود منصف های اضلاع هر مثلث همسایه اند. از طرفی نقطه همرسی عمود منصف های هر مثلث مرکز دایره محیطی آن می باشد. از آن جایی که زاویه A محاطی است، پس کمان BC برابر 180° می باشد، بنابراین پاره خط BC قطر دایره می باشد.

حال در مثلث قائم الزاویه ABC داریم:

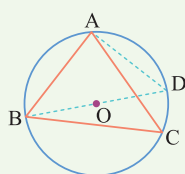
$$\sin \hat{B} = \frac{AC}{BC} \Rightarrow \sin \hat{B} = \frac{b}{2R} \Rightarrow \frac{b}{\sin \hat{B}} = 2R \quad (1)$$

$$\sin \hat{C} = \frac{AB}{BC} \Rightarrow \sin \hat{C} = \frac{c}{2R} \Rightarrow \frac{c}{\sin \hat{C}} = 2R \quad (2)$$

$$\sin \hat{A} = \sin 90^\circ = 1 \Rightarrow \frac{a}{\sin \hat{A}} = \frac{a}{1} = a \xrightarrow{a=2R} \frac{a}{\sin \hat{A}} = 2R \quad (3)$$

با توجه به تساوی های (۱)، (۲) و (۳) داریم:

$$\frac{a}{\sin \hat{A}} = \frac{b}{\sin \hat{B}} = \frac{c}{\sin \hat{C}} = 2R$$



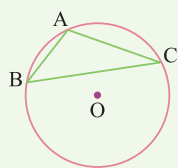
مثلث ABC حاده الزاویه است. می دانیم در مثلث حاده الزاویه نقطه همرسی عمود منصف ها داخل مثلث قرار دارد، پس مرکز دایره محیطی مثلث داخل مثلث قرار می گیرد. حال قطر BD را رسم می کنیم. سپس از D به A وصل می کنیم. زوایای C و D زوایای محاطی رو به کمان AB هستند، پس با هم برابرند، از طرفی زاویه $\hat{BAD}$ زاویه محاطی رو به نیم دایره است، پس قائمه می باشد. حال طبق حالت اول در مثلث قائم الزاویه BAD داریم:

$$\sin \hat{D} = \frac{AB}{BD} = \frac{c}{2R} \Rightarrow \frac{c}{\sin \hat{D}} = 2R \xrightarrow{\hat{C}=\hat{D}} \frac{c}{\sin \hat{C}} = 2R$$

به طریق مشابه می توان نشان داد که $\frac{a}{\sin \hat{A}} = 2R$ و $\frac{b}{\sin \hat{B}} = 2R$ می باشند، پس:

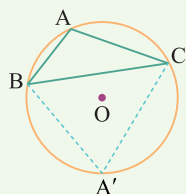
$$\frac{a}{\sin \hat{A}} = \frac{b}{\sin \hat{B}} = \frac{c}{\sin \hat{C}} = 2R$$

برای دسترسی به محتوای بیشتر به کانال تلگرامی @ArashAmid مراجعه کنید.



حالت سوم مثلث ABC منفرجه الزاویه است. دایره محیطی مثلث را رسم می‌کنیم. از آن جایی که مثلث منفرجه الزاویه است، پس نقطه هم‌رسی عمود منصف‌های آن بیرون مثلث است، پس مرکز دایره محیطی آن بیرون مثلث قرار می‌گیرد. حال نقطه A' را طوری روی کمان BC در نظر می‌گیریم که مرکز دایره درون مثلث $A'BC$ قرار بگیرد. بنابراین مثلث $A'BC$ حاده الزاویه خواهد بود.

زوایای A و A' محاطی هستند، پس:



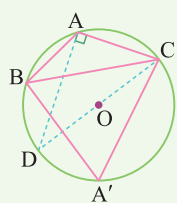
$$\begin{cases} \hat{A} = \frac{\widehat{BA'C}}{2} \\ \hat{A'} = \frac{\widehat{BAC}}{2} \end{cases} \Rightarrow \hat{A} + \hat{A'} = \frac{\widehat{BA'C}}{2} + \frac{\widehat{BAC}}{2} = \frac{\widehat{BA'C} + \widehat{BAC}}{2} = \frac{36^\circ}{2} = 18^\circ$$

بنابراین زوایای A و A' مکمل اند و داریم:

$$\sin \hat{A} = \sin(18^\circ - \hat{A'}) = \sin \hat{A'}$$

با توجه به نتیجه حالت دوم در مثلث حاده الزاویه $A'BC$ داریم:

$$\frac{a}{\sin \hat{A'}} = 2R \xrightarrow{\sin \hat{A'} = \sin \hat{A}} \frac{a}{\sin \hat{A}} = 2R$$



حال قطر CD را رسم کرده، سپس از D به A وصل می‌کنیم، زاویه محاطی $\widehat{DAC}$ رو به نیم دایره است، پس قائمه می‌باشد.

در مثلث قائم الزاویه ADC داریم:

$$\sin \hat{D} = \frac{AC}{DC} = \frac{b}{2R}$$

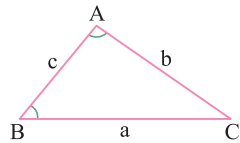
از طرفی زوایای محاطی B و D رو به کمان AC هستند، پس با هم برابرند و داریم:

$$\sin \hat{D} = \frac{b}{2R} \xrightarrow{\hat{D} = \hat{B}} \sin \hat{B} = \frac{b}{2R} \Rightarrow \frac{b}{\sin \hat{B}} = 2R$$

به طریق مشابه با رسم قطر BD' می‌توان نشان داد که $\frac{c}{\sin \hat{C}} = 2R$ می‌باشد، پس:

$$\frac{a}{\sin \hat{A}} = \frac{b}{\sin \hat{B}} = \frac{c}{\sin \hat{C}} = 2R$$

■ **قضیه کسینوس‌ها:** در هر مثلث مربع اندازه هر ضلع برابر است با مجموع مربع‌های اندازه‌های دو ضلع دیگر منهای دو برابر حاصل ضرب آن دو ضلع در کسینوس زاویه بین آن‌ها.



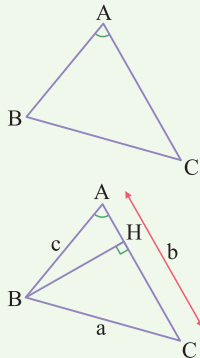
$$\begin{aligned}a^2 &= b^2 + c^2 - 2bc \cos \hat{A} \\b^2 &= a^2 + c^2 - 2ac \cos \hat{B} \\c^2 &= a^2 + b^2 - 2ab \cos \hat{C}\end{aligned}$$

اثبات

در حالتی که $\hat{A} = 90^\circ$ باشد، با توجه به این که $\cos \hat{A} = 0$ است، قضیه کسینوس‌ها تبدیل به قضیه فیثاغورس می‌شود که اثبات آن را در هندسه (۱) دیده‌ایم. بنابراین قضیه کسینوس‌ها را برای $\hat{A} < 90^\circ$ و $\hat{A} > 90^\circ$ اثبات می‌کنیم.

حالت اول فرض می‌کنیم $\hat{A} < 90^\circ$ باشد:

ابتدا ارتفاع BH را رسم می‌کنیم. در مثلث قائم‌الزاویه ABH داریم:



$$\cos \hat{A} = \frac{AH}{c} \Rightarrow AH = c \cos \hat{A}$$

$$CH = b - AH = b - c \cos \hat{A}$$

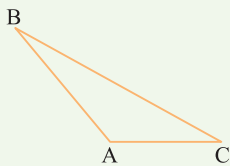
$$\sin \hat{A} = \frac{BH}{c} \Rightarrow BH = c \sin \hat{A}$$

حال به کمک قضیه فیثاغورس در مثلث قائم‌الزاویه BHC داریم:

$$BC^2 = BH^2 + CH^2 \Rightarrow a^2 = (c \sin \hat{A})^2 + (b - c \cos \hat{A})^2$$

$$\Rightarrow a^2 = c^2 \sin^2 \hat{A} + b^2 - 2bc \cos \hat{A} + c^2 \cos^2 \hat{A} \Rightarrow a^2 = b^2 + c^2 (\underbrace{\sin^2 \hat{A} + \cos^2 \hat{A}}_1) - 2bc \cos \hat{A} \Rightarrow a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \hat{A}$$

حالت دوم فرض می‌کنیم $\hat{A} > 90^\circ$ باشد:

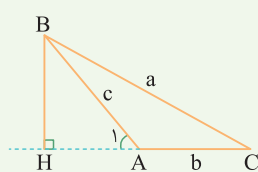


ابتدا ارتفاع BH را رسم می‌کنیم. با توجه به شکل زیر، $\hat{A} + \hat{A}_1 = 180^\circ$ می‌باشد، پس:

$$\sin \hat{A}_1 = \sin(180^\circ - \hat{A}) = \sin \hat{A}$$

$$\cos \hat{A}_1 = \cos(180^\circ - \hat{A}) = -\cos \hat{A}$$

در مثلث قائم‌الزاویه زیر داریم:



$$\cos \hat{A}_1 = \frac{AH}{c} \Rightarrow AH = c \cos \hat{A}_1 = -c \cos \hat{A}$$

$$\sin \hat{A}_1 = \frac{BH}{c} \Rightarrow BH = c \sin \hat{A}_1 = c \sin \hat{A}$$

$$CH = b + AH = b - c \cos \hat{A}$$

حال به کمک قضیه فیثاغورس در مثلث BHC داریم:

$$BC^2 = BH^2 + CH^2 \Rightarrow a^2 = (c \sin \hat{A})^2 + (b - c \cos \hat{A})^2 \Rightarrow a^2 = c^2 \sin^2 \hat{A} + b^2 - 2bc \cos \hat{A} + c^2 \cos^2 \hat{A}$$

$$\Rightarrow a^2 = b^2 + c^2 (\underbrace{\sin^2 \hat{A} + \cos^2 \hat{A}}_1) - 2bc \cos \hat{A} \Rightarrow a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \hat{A}$$

■ **تشخیص حاده، قائمه یا منفرجه بودن زاویه مثلث:** از آنجایی که در مثلث ABC ، اگر $\hat{A} < 90^\circ$ آن گاه $\cos \hat{A} > 0$ ، اگر $\hat{A} = 90^\circ$ آن گاه $\cos \hat{A} = 0$ و اگر $\hat{A} > 90^\circ$ آن گاه $\cos \hat{A} < 0$ می باشد، به کمک قضیه کسینوس ها می توان حاده، قائمه یا منفرجه بودن زاویه A را در مثلث ABC به کمک طول اضلاع تعیین کرد.

(تمرین ۹ قسمت های (الف)، (ب) و (پ) صفحه ۷۴ کتاب درسی)

$$A < 90^\circ \Leftrightarrow a^2 < b^2 + c^2$$

$$\hat{A} = 90^\circ \Leftrightarrow a^2 = b^2 + c^2$$

$$\hat{A} > 90^\circ \Leftrightarrow a^2 > b^2 + c^2$$

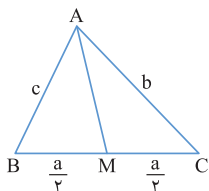
اثبات

می دانیم در مثلث ABC ، $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \hat{A}$ می باشد، پس:

$$a^2 < b^2 + c^2 \Leftrightarrow b^2 + c^2 - 2bc \cos \hat{A} < b^2 + c^2 \Leftrightarrow -2bc \cos \hat{A} < 0 \Leftrightarrow \cos \hat{A} > 0 \Leftrightarrow \hat{A} < 90^\circ$$

$$a^2 = b^2 + c^2 \Leftrightarrow b^2 + c^2 - 2bc \cos \hat{A} = b^2 + c^2 \Leftrightarrow -2bc \cos \hat{A} = 0 \Leftrightarrow \cos \hat{A} = 0 \Leftrightarrow \hat{A} = 90^\circ$$

$$a^2 > b^2 + c^2 \Leftrightarrow b^2 + c^2 - 2bc \cos \hat{A} > b^2 + c^2 \Rightarrow -2bc \cos \hat{A} > 0 \Leftrightarrow \cos \hat{A} < 0 \Leftrightarrow \hat{A} > 90^\circ$$



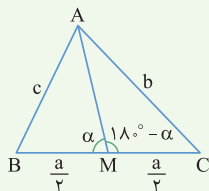
(تمرین ۴ صفحه ۶۷ کتاب درسی)

■ **قضیه میانه ها:** در مثلث ABC طول میانه AM از رابطه زیر به دست می آید.

$$2AM^2 = b^2 + c^2 - \frac{a^2}{2}$$

اثبات

کافی است در دو مثلث AMB و AMC به کمک قضیه کسینوس ها b^2 و c^2 را به دست آوریم:



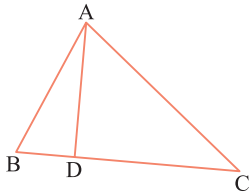
$$c^2 = AM^2 + \frac{a^2}{4} - 2 \times AM \times \frac{a}{2} \times \cos \alpha$$

$$b^2 = AM^2 + \frac{a^2}{4} - 2 \times AM \times \frac{a}{2} \times \cos(180^\circ - \alpha)$$

می دانیم $\cos(180^\circ - \alpha) = -\cos \alpha$ است، پس:

$$\begin{cases} c^2 = AM^2 + \frac{a^2}{4} - 2 \times AM \times \frac{a}{2} \cos \alpha \\ b^2 = AM^2 + \frac{a^2}{4} - 2 \times AM \times \frac{a}{2} \times (-\cos \alpha) \end{cases} \Rightarrow b^2 + c^2 = 2AM^2 + \frac{a^2}{2} \Rightarrow 2AM^2 = b^2 + c^2 - \frac{a^2}{2}$$

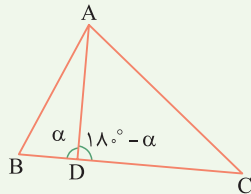
(تمرین ۵ صفحه ۶۷ کتاب درسی)

■ **قضیه استوارت:** در مثلث ABC، نقطه دلخواه D روی ضلع BC است. آن گاه طول AD از تساوی زیر به دست می آید:

$$AB^2 \times DC + AC^2 \times DB = AD^2 \times BC + DB \times DC \times BC$$

اثبات

به کمک قضیه کسینوس ها در مثلث های ADB و ADC داریم:



$$\begin{cases} AB^2 = AD^2 + DB^2 - 2AD \times DB \times \cos \alpha & (1) \\ AC^2 = AD^2 + DC^2 - 2AD \times DC \times \cos(180^\circ - \alpha) \end{cases} \xrightarrow{\cos(180^\circ - \alpha) = -\cos \alpha}$$

$$AC^2 = AD^2 + DC^2 + 2AD \times DC \times \cos \alpha \quad (2)$$

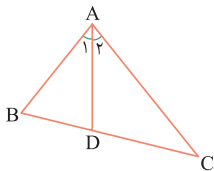
حال طرفین تساوی (۱) را در DC و طرفین تساوی (۲) را در DB ضرب می کنیم و داریم:

$$\begin{cases} AB^2 \times DC = AD^2 \times DC + DB^2 \times DC - 2AD \times DB \times DC \times \cos \alpha \\ AC^2 \times DB = AD^2 \times DB + DC^2 \times DB + 2AD \times DB \times DC \times \cos \alpha \end{cases} \Rightarrow$$

$$AB^2 \times DC + AC^2 \times DB = AD^2 \times DC + AD^2 \times DB + DB^2 \times DC + DC^2 \times DB$$

$$\Rightarrow AB^2 \times DC + AC^2 \times DB = AD^2 \times (\underbrace{DC + DB}_{BC}) + (DB \times DC) \times (\underbrace{DB + DC}_{BC})$$

$$\Rightarrow AB^2 \times DC + AC^2 \times DB = AD^2 \times BC + DB \times DC \times BC$$

■ **قضیه نیمسازهای زوایای داخلی:** در هر مثلث، نیمساز هر زاویه داخلی، ضلع روبه رو به آن زاویه را به نسبت

اندازه های ضلع های آن زاویه تقسیم می کند:

$$\hat{A}_1 = \hat{A}_2 \Rightarrow \frac{AB}{AC} = \frac{BD}{CD}$$

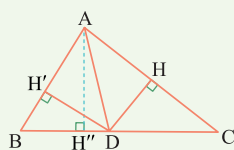
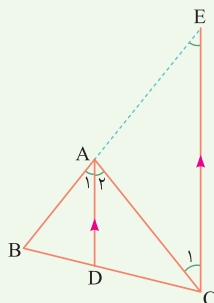
اثبات

حالت اول از نقطه C خطی به موازات نیمساز AD رسم می کنیم تا امتداد AB را در نقطه E قطع کند. طبق قضیه خطوط موازی و مورب داریم:

$$\begin{cases} \hat{A}_1 = \hat{E} \\ \hat{A}_2 = \hat{C}_1 \end{cases} \xrightarrow{\hat{A}_1 = \hat{A}_2} \hat{E} = \hat{C}_1$$

با توجه به برابری $\hat{E} = \hat{C}_1$ ، مثلث ACE متساوی الساقین بوده و $AE = AC$ می باشد. حال به کمک قضیه تالس در مثلث EBC داریم:

$$\frac{BD}{CD} = \frac{AB}{AE} \xrightarrow{AE=AC} \frac{BD}{CD} = \frac{AB}{AC}$$

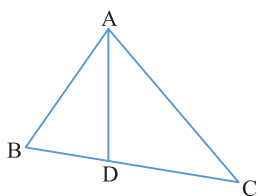


حالت دوم از نقطه D بر اضلاع AB و AC عمود می کنیم و پای عمودها را H' و H می نامیم. همچنین ارتفاع AH'' را در مثلث ABC رسم می کنیم. از آن جایی که D روی نیمساز زاویه A است، پس $DH = DH'$ می باشد.

(تمرین ۳ صفحه ۷۰ کتاب درسی)

حال داریم:

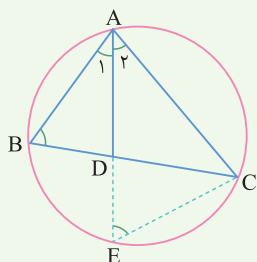
$$\begin{cases} \frac{S_{\triangle ABD}}{S_{\triangle ACD}} = \frac{\frac{1}{2} \times BD \times AH''}{\frac{1}{2} \times CD \times AH''} = \frac{BD}{CD} \\ \frac{S_{\triangle ABD}}{S_{\triangle ACD}} = \frac{\frac{1}{2} \times AB \times DH'}{\frac{1}{2} \times AC \times DH} = \frac{AB}{AC} \end{cases} \Rightarrow \frac{AB}{AC} = \frac{BD}{CD}$$



■ **محاسبه طول نیمسازهای زوایای داخلی مثلث:** در هر مثلث مربع اندازه هر نیمساز داخلی برابر است با حاصل ضرب اندازه دو ضلع زاویه، منهای حاصل ضرب اندازه دو قطعه‌ای که نیمساز روی ضلع مقابل ایجاد می‌کند.

$$AD^2 = AB \times AC - BD \times DC$$

اثبات



دایره محیطی مثلث ABC را رسم می‌کنیم و نیمساز AD را امتداد می‌دهیم تا دایره را در نقطه E قطع کند. از E به C وصل می‌کنیم. زوایای B و E با هم برابرند، زیرا زوایای محاطی رو به کمان AC هستند. بنابراین دو مثلث ABD و AEC با دو زاویه برابر متشابه‌اند:

$$\begin{cases} \hat{A}_1 = \hat{A}_2 \\ \hat{B} = \hat{E} \end{cases} \Rightarrow \triangle ABD \sim \triangle AEC$$

بنابراین اضلاع متناظر دو مثلث متناسب‌اند:

$$\frac{AC}{AD} = \frac{AE}{AB} = \frac{EC}{BD} \xrightarrow{\text{طرفین وسطین}} AC \times AB = AD \times AE$$

از طرفی $AE = AD + DE$ می‌باشد، پس:

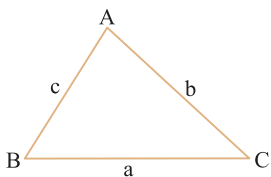
$$AC \times AB = AD \times AE \xrightarrow{AE = AD + DE} AC \times AB = AD \times (AD + DE) \Rightarrow AC \times AB = AD^2 + AD \times DE$$

$$AD \times DE = BD \times DC$$

حال با به کار بردن رابطه طولی در وترهای متقاطع BC و AE داریم:

بنابراین داریم:

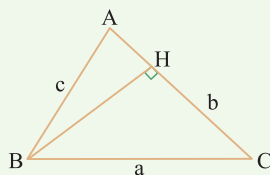
$$AC \times AB = AD^2 + AD \times DE \xrightarrow{AD \times DE = BD \times DC} AC \times AB = AD^2 + BD \times DC \Rightarrow AD^2 = AC \times AB - BD \times DC$$



■ **مساحت مثلث برحسب دو ضلع و زاویه بین آن‌ها:** مساحت هر مثلث برابر است با نصف حاصل ضرب اندازه‌های هر دو ضلع در سینوس زاویه بین آن‌ها. (فعالیت صفحه ۷۲ کتاب درسی)

$$S = \frac{1}{2} bc \sin \hat{A} = \frac{1}{2} ab \sin \hat{C} = \frac{1}{2} ac \sin \hat{B}$$

اثبات



ارتفاع BH از مثلث ABC را رسم می‌کنیم و داریم:

$$S = \frac{1}{2} \times AC \times BH$$

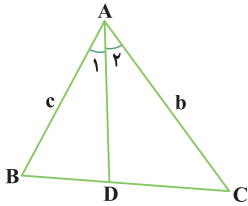
از طرفی در مثلث قائم الزاویه AHB داریم:

$$\sin \hat{A} = \frac{BH}{AB} \Rightarrow BH = AB \sin \hat{A}$$

$$S = \frac{1}{2} \times AC \times AB \sin \hat{A} = \frac{1}{2} bc \sin \hat{A}$$

با جای‌گذاری $BH = AB \sin \hat{A}$ در تساوی $S = \frac{1}{2} \times AC \times BH$ داریم:

■ **فرمول طول نیمساز زاویه مثلث برحسب اندازه آن زاویه:** در مثلث ABC طول نیمساز زاویه A از رابطه زیر به دست می آید. (تمرین ۵ صفحه ۷۴ کتاب درسی)

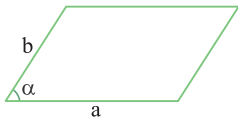


$$AD = \frac{2bc \cos \frac{\hat{A}}{2}}{b+c}$$

اثبات

مساحت مثلث ABC برابر است با مجموع مساحت مثلث های ADB و ADC، پس:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \times AB \times AC \times \sin \hat{A} &= \frac{1}{2} \times AB \times AD \times \sin \frac{\hat{A}}{2} + \frac{1}{2} \times AC \times AD \times \sin \frac{\hat{A}}{2} \\ \Rightarrow AB \times AC \times \sin \hat{A} &= AD \sin \frac{\hat{A}}{2} (AB + AC) \Rightarrow AD = \frac{AB \times AC \times \sin \hat{A}}{(AB + AC) \sin \frac{\hat{A}}{2}} \\ \Rightarrow AD &= \frac{AB \times AC \times 2 \sin \frac{\hat{A}}{2} \cos \frac{\hat{A}}{2}}{(AB + AC) \sin \frac{\hat{A}}{2}} \Rightarrow AD = \frac{2bc \cos \frac{\hat{A}}{2}}{b+c} \end{aligned}$$



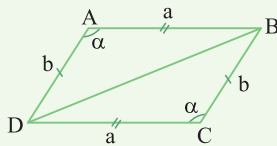
■ **مساحت متوازی الاضلاع برحسب دو ضلع مجاور و زاویه بین آن ها:** مساحت هر متوازی الاضلاع برابر است

(تمرین ۸ صفحه ۷۴ کتاب درسی)

با حاصل ضرب دو ضلع مجاور در سینوس زاویه بین دو ضلع.

$$S = ab \sin \alpha$$

اثبات



در هر متوازی الاضلاع زوایای مقابل و اضلاع مقابل با هم برابرند. با رسم قطر BD، مثلث های ABD و CBD با سه ضلع برابر همنهشت هستند، پس مساحت های آن ها با هم برابر است:

$$\begin{cases} AD = BC \\ AB = CD \Rightarrow \triangle ABD \cong \triangle CBD \\ BD = BD \end{cases} \Rightarrow S_{\triangle ABD} = S_{\triangle CBD}$$

از طرفی $S_{ABCD} = S_{\triangle ABD} + S_{\triangle CBD}$ می باشد، پس:

$$S_{ABCD} = S_{\triangle ABD} + S_{\triangle CBD} = 2 \times S_{\triangle ABD} = 2 \times \frac{1}{2} \times AB \times AD \times \sin \alpha = AB \times AD \times \sin \alpha = ab \sin \alpha$$

موفق باشید

آرش عمید